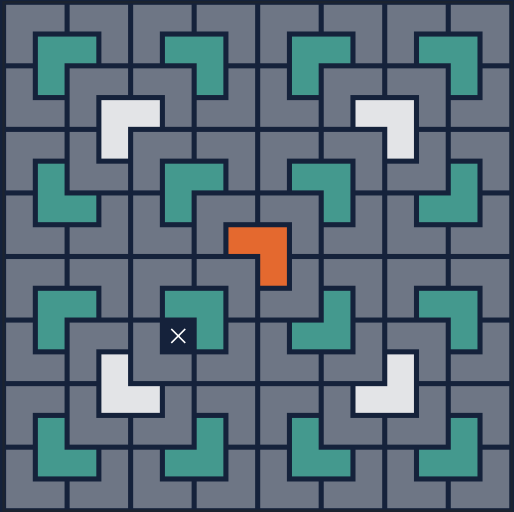
Cursul 1

Inducție, recursivitate și verificarea argumentelor

Metode ale matematicii discrete și aplicații

George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027



Cursul 1 · partea 1

Problema pavării

O tablă cu o gaură

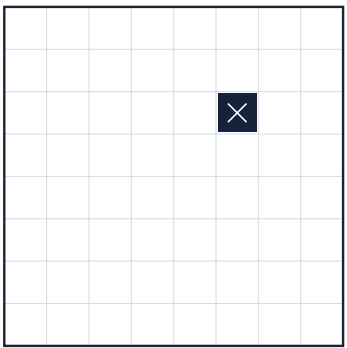


Tabla are $2^n \times 2^n$ pătrățele; unul singur lipsește.

Piesele: *triominouri în L*, în oricare dintre cele patru poziții.



Întrebare

Putem acoperi restul tablei fără suprapuneri și fără goluri?

Încercați, în perechi



Tabla 2 × 2
pentru fiecare poziție a găurii

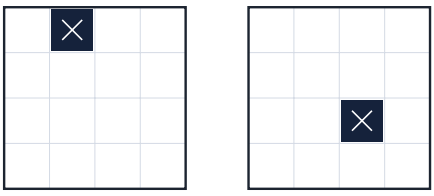


Tabla 4 × 4
gaura pe margine, apoi în interior

Ce se schimbă atunci când mutăm gaura?

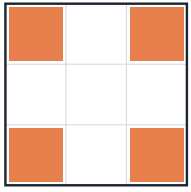
Numărarea: o condiție necesară, nu suficientă

O pavare cu p piese acoperă $3p$ pătrățele, deci $3p = 4^n - 1$.

Condiție necesară: $3 \mid 4^n - 1$.

Dar tabla 3×3 nu se poate pava, deși are 9 pătrățele:

- un triomino acoperă cel mult un colț;
- colțurile sunt 4, piesele doar 3.



Ideea

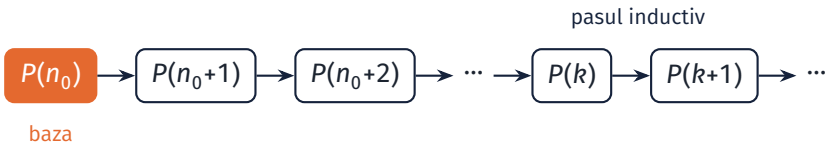
Numărarea poate exclude o pavare. Ca să arătăm că una există, avem nevoie de o construcție.

Cursul 1 · partea 2

Inducția

Principiul inducției

Principiul inducției
Dacă **baza** $P(n_0)$ este adevărată și **pasul inductiv** $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ este demonstrat pentru *orice* $k \geq n_0$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.



În pas demonstrăm o **implicație**: presupunem $P(k)$ (ipoteza de inducție) și deducem $P(k+1)$. O singură verigă lipsă rupe lanțul.

Un prim exemplu

Afirmație
Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $4^n - 1$ este divizibil cu 3.

Baza. $4^0 - 1 = 0$ este divizibil cu 3.

Pasul inductiv. Presupunem $3 \mid 4^k - 1$. Atunci

$$4^{k+1} - 1 = 4 \underbrace{(4^k - 1)}_{\text{ipoteza de inducție}} + 3.$$

Ambii termeni sunt divizibili cu 3, deci $3 \mid 4^{k+1} - 1$.

La orice demonstrație prin inducție: indicați exact rândul în care folosiți ipoteza.

Ce afirmăm, exact?

Teorema pavării
Pentru orice $n \geq 1$ și **orice** pătrățel d al tablei $2^n \times 2^n$, tabla fără d se poate pava cu triominouri în L.

Afirmația transmisă de la un pas la altul:

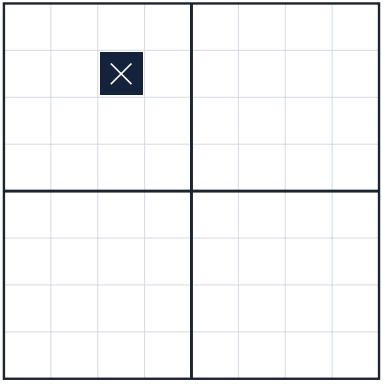
$$P(n): \text{ pentru } \textbf{orice} \text{ gaură } d, \text{ tabla } 2^n \times 2^n \text{ fără } d \text{ se poate pava.}$$

- Pavarea poate depinde de d.
- Baza $n = 1$: cele trei pătrățele rămase formează un L.

ÎNTREBARE

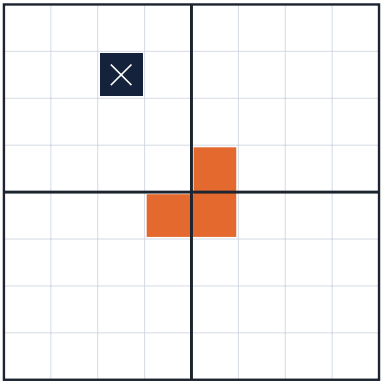
Cum reducem tabla $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ la table $2^k \times 2^k$?

Pasul inductiv



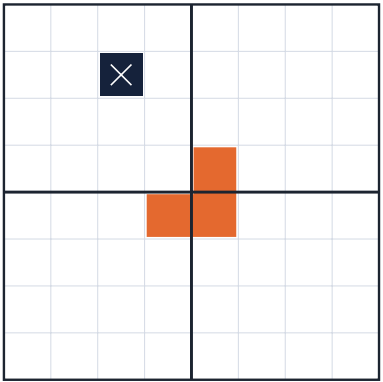
1. Împărțim tabla în patru cadrane $2^k \times 2^k$.
2. Un singur cadran conține gaura d.

Pasul inductiv



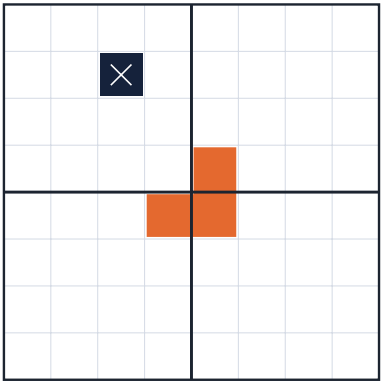
1. Împărțim tabla în patru cadrane $2^k \times 2^k$.
2. Un singur cadran conține gaura d.
3. Punem un L pe cele trei pătrățele centrale din celelalte cadrane.

Pasul inductiv



1. Împărțim tabla în patru cadrane $2^k \times 2^k$.
2. Un singur cadran conține gaura d.
3. Punem un L pe cele trei pătrățele centrale din celelalte cadrane.
4. Acum **fiecare** cadran are exact un pătrățel indisponibil: aplicăm $P(k)$ de patru ori.

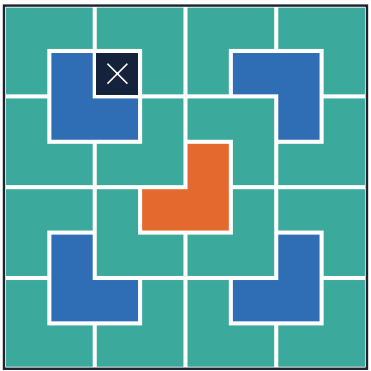
Pasul inductiv



1. Împărțim tabla în patru cadrane $2^k \times 2^k$.
2. Un singur cadran conține gaura d.
3. Punem un L pe cele trei pătrățele centrale din celelalte cadrane.
4. Acum **fiecare** cadran are exact un pătrățel indisponibil: aplicăm $P(k)$ de patru ori.
5. Reunim: cadranele sunt disjuncte, iar pavările evită piesa centrală.

Rezultă $P(k+1)$.

Demonstrația construiește pavarea



Aplicăm pasul în fiecare cadran, apoi în fiecare sfert de cadran.

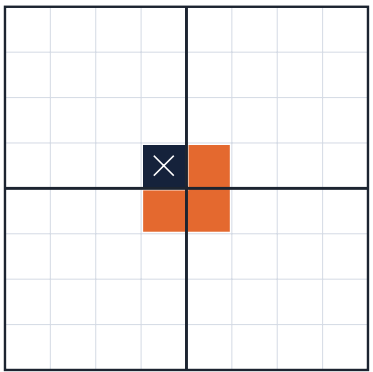
- piesa centrală a tablei: 1
- piesele centrale ale cadranelor: 4
- piesele din blocurile 2 × 2: 16

Total: $1 + 4 + 16 = 21 = (4^3 - 1)/3$.

Ideea

O demonstrație prin inducție poate fi citită ca un algoritm.

De ce „orice gaură”?



Încercăm să demonstrăm doar cazul în care *gaura este în centru*.

După piesa centrală, fiecare cadran are pătrățelul indisponibil **într-un colț**.

Pentru cadrane de latură ≥ 4, ca aici, ipoteza „gaura este în centru” nu se aplică niciunui cadran: pasul eșuează.

Ideea

O afirmație mai tare are și o ipoteză de inducție mai tare.

Uneori, mai tare înseamnă mai ușor

Exemplu

Pentru $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$ avem $s_n < 2$ pentru orice $n \geq 1$.

Direct: din $s_k < 2$ **nu** rezultă $s_k + \frac{1}{(k+1)^2} < 2$.

Întărim afirmația: $s_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Baza: $s_1 = 1 = 2 - 1$. Pasul:

$$s_{k+1} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}, \quad \text{deoarece} \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

Același fenomen ca la pavare: ipoteza trebuie să poată fi folosită în pas.

Cursul 1 · partea 3

Inducția tare și inducția structurală

Inducția tare

Principiul inducției tari

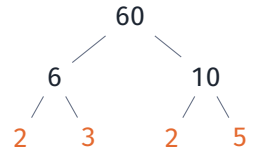
Dacă $P(n_0)$ este adevărată și, pentru orice $k \geq n_0$,

$$P(n_0),\ P(n_0+1), \ldots, P(k) \implies P(k+1),$$

atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

În pas putem folosi **toate** cazurile mai mici, nu doar cazul k.

Nu este un principiu nou: aplicăm inducția obișnuită afirmației „$P(n_0), \ldots, P(k)$ sunt adevărate”.



$60 = 6 \cdot 10$ folosește cazurile 6 și 10

Orice $n \geq 2$ este un produs de numere prime

Baza. 2 este prim.

Pasul. Presupunem afirmația pentru toți m cu $2 \leq m \leq k$.

- Dacă $k+1$ este prim, am terminat.
- Altfel $k+1 = ab$ cu $2 \leq a \leq k$ și $2 \leq b \leq k$.
- Ipoteza se aplică **și lui a, și lui b**; înmulțim descompunerile.

> **Atenție**
> Am demonstrat *existența*. Unicitatea (teorema fundamentală a aritmeticii) cere un argument suplimentar: lema lui Euclid.

Buna ordonare și contraexemplul minimal

Principiul bunei ordonări
Orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Metoda: presupunem că afirmația are contraexemple, îl alegem pe cel mai mic și, folosind faptul că toate cazurile mai mici sunt adevărate, ajungem la o contradicție.

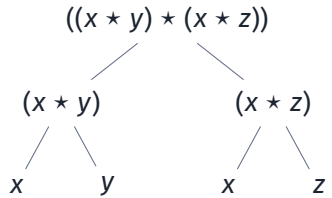
Din nou factorii primi
Fie m cel mai mic întreg ≥ 2 fără descompunere. Nu este prim, deci $m = ab$ cu $2 \leq a, b < m$. Prin minimalitate, a și b au descompuneri, deci și m are. Contradicție.

Expresii definite recursiv

1. Orice variabilă $x, y, z, \ldots$ este o expresie.
2. Dacă U, V sunt expresii, atunci $(U \star V)$ este o expresie.
3. Nimic altceva nu este expresie.

$v(E)$ = numărul **aparițiilor** de variabile
$o(E)$ = numărul aparițiilor lui $\star$

Cât sunt v și o pentru $(x \star x)$?



$v = 4$, $o = 3$, dar numai trei nume

Inducție structurală

Propoziție
Pentru orice expresie E: $v(E) = o(E) + 1$.

Obiectele de bază. $E = x$: $v = 1, o = 0$.

Regula de construcție. $E = (U \star V)$, cu U și V având proprietatea:

$$v(E) = v(U) + v(V) = \big(o(U) + 1\big) + \big(o(V) + 1\big) = o(E) + 1.$$

Ideea
Proprietate adevărată pentru obiectele de bază și păstrată de fiecare regulă ⇒ adevărată pentru toate obiectele.

Cursul 1 · partea 4

Proceduri recursive și audit

Procedura PAVEAZĂ(T, d)

Intrare: tablă de latură 2^r, $r \geq 1$, cu un pătrățel indisponibil d.

1. Dacă $r = 1$: așază singurul L posibil și oprește-te.
2. Altfel: împarte în cadrane și așază piesa centrală.
3. Apelează PAVEAZĂ pentru fiecare cadran, cu pătrățelul său indisponibil.

Corectitudine

Invariant: fiecare apel primește o tablă cu exact un pătrățel indisponibil.

Terminare

Măsura $r - 1 \in \mathbb{N}$ scade la fiecare apel. Apeluri = piese = $\frac{4^n - 1}{3}$.

Ce rămâne adevărat? Ce scade?

Algoritmul lui Euclid, pentru $a, b \in \mathbb{N}$, nu ambele nule

$$\text{Euclid}(a, b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ \text{Euclid}(b,\ a \bmod b), & b > 0. \end{cases}$$

Invariant:
$\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b,\ a \bmod b)$.

Măsură: $0 \le a \bmod b < b$; al doilea argument scade strict în $\mathbb{N}$.

Ideea

Două obligații independente: un invariant nu garantează oprirea, iar oprirea nu garantează un rezultat corect.

Toți caii au aceeași culoare?

Pentru $k + 1$ cai: scoatem primul cal, apoi ultimul. Fiecare grup de k cai este monocrom. „Grupurile au cai în comun”, deci toți au aceeași culoare.



$k + 1 = 4$

Toți caii au aceeași culoare?

Pentru $k + 1$ cai: scoatem primul cal, apoi ultimul. Fiecare grup de k cai este monocrom. „Grupurile au cai în comun”, deci toți au aceeași culoare.

Intersecția $\{2, \ldots, k\}$ are $k - 1$ elemente: **vidă pentru $k = 1$**.



$k + 1 = 4$



$k + 1 = 2$

Toți caii au aceeași culoare?

Pentru $k + 1$ cai: scoatem primul cal, apoi ultimul. Fiecare grup de k cai este monocrom. „Grupurile au cai în comun”, deci toți au aceeași culoare.

Intersecția $\{2, \ldots, k\}$ are $k - 1$ elemente: **vidă pentru $k = 1$**.

Implicația $P(1) \Rightarrow P(2)$ lipsește. Lanțul se rupe chiar la prima verigă.



$k + 1 = 4$



$k + 1 = 2$

Experiment și demonstrație

Valorile lui $n^2 + n + 41$ pentru $n = 0, 1, \ldots, 39$ sunt toate prime:

41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
151	173	197	223	251	281	313	347	383	421
461	503	547	593	641	691	743	797	853	911
971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

$$n = 40: \quad 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$$

Patruzeci de verificări reușite nu demonstrează afirmația; un singur contraexemplu o infirmă.

Cum citim o demonstrație prin inducție

1. Care este $P(n)$, cu toate cuantificările, și de la ce indice pornește?
2. Este baza verificată pentru indicele inițial corect?
3. Este pasul demonstrat pentru **orice** k din domeniu, inclusiv pentru primul?
4. Unde se folosește ipoteza de inducție și de ce se aplică?
5. Sunt tratate toate cazurile? Ce justifică reunirea rezultatelor?
6. Dacă este o procedură: ce scade și de ce se oprește?

Ideea

Aceleași întrebări pentru un argument al unui coleg, dintr-o carte sau de la un asistent AI.

Pentru seminarul S01

Pentru toată lumea

- S1.1: o sumă, două explicații
- S1.2: funcții, injecții, cutii
- S1.3: alegeri din $\{1, \dots, 2n\}$

Pagina „Înainte de seminar” conține tot ce trebuie din cursul 2.

Apoi, la alegere

- S1.4: inducție care produce un algoritm
- S1.6: atelier de audit
- S1.7: coduri Gray și paritate

La seminar

Aduceți încercările voastre: o idee, un caz mic verificat și locul exact în care v-ați blocat.