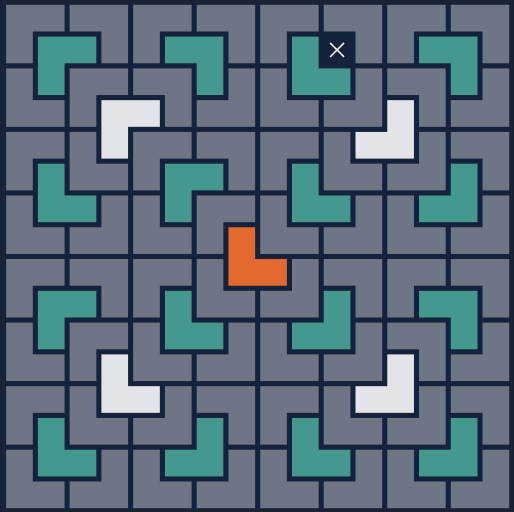
Cursul 2

Numărare, bijecții și principiul cutiei

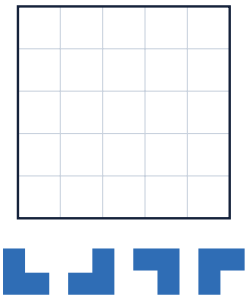
Metode ale matematicii discrete și aplicații



George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027

Quiz · trei minute



Din tabla 5 × 5 scoatem un singur pătrățel. Pentru câte dintre cele 25 de poziții ale găurii se poate pava restul tablei cu triominouri în L?

A. Pentru toate: rămân 24 de pătrățele, iar 3 | 24.

B. Pentru exact 9 poziții.

C. Numai pentru gaura din centru.

D. Pentru niciuna: 5 nu este o putere a lui 2.

Pe o foaie scrieți numai numele și litera aleasă.

Cursul 2 · partea 1

Descrieri și obiecte

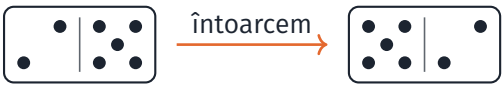
Câte piese are un joc de domino?



Întrebare

Pe fiecare jumătate a unei piese se află între 0 și 6 puncte. Un joc complet conține fiecare piesă posibilă exact o dată. Câte piese are jocul?

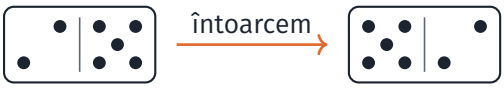
O primă numărare



Descriem o piesă prin perechea (a, b), cu $0 \le a, b \le 6$: $7 \cdot 7 = 49$ de perechi.

Fiecare piesă este numărată de două ori, deci jocul are $\frac{49}{2} = 24{,}5$ piese?

O primă numărare

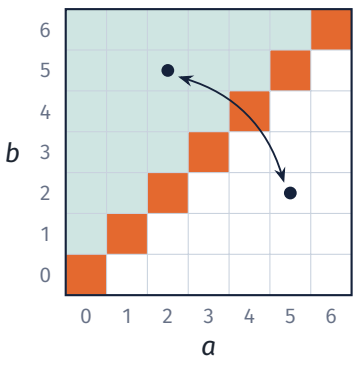


Descriem o piesă prin perechea (a, b), cu $0 \le a, b \le 6$: $7 \cdot 7 = 49$ de perechi.

Fiecare piesă este numărată de două ori, deci jocul are $\frac{49}{2} = 24{,}5$ piese?

Unde este greșeala?
Piesa $(3, 3)$, întoarsă, rămâne $(3, 3)$: dublele au o *singură* descriere.

Dublele au o singură descriere



- diagonala: 7 duble, câte o descriere
- deasupra diagonalei: celelalte 21 de piese
- sub diagonală: a doua descriere a acelorași piese

$$49 = 7 \cdot 1 + 21 \cdot 2,$$

deci jocul are $7 + 21 = 28$ de piese.

Exact câte găsiți într-o cutie de domino.

Și dacă împărțirea dă un număr întreg?

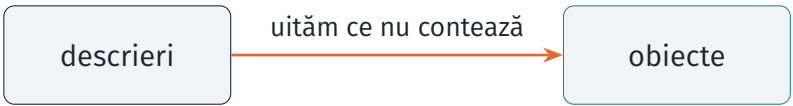
Identificăm un șir binar de lungime 3 cu șirul citit invers: 001 ~ 100. $\frac{8}{2} = 4$?

{000}	{010}	{101}
{111}	{001, 100}	{011, 110}

Sunt **șase** obiecte: cele patru palindroame au o singură descriere, ca dublele de domino.

Un cât întreg nu dovedește că împărțirea este corectă.

Înaintea oricărei împărțiri



Două întrebări

Ce numărăm: descrieri sau obiecte?
Câte descrieri are *fiecare* obiect?

Răspunsul la a doua întrebare decide dacă avem voie să împărțim.

Cursul 2 · partea 2

Suma și produsul

Două reguli și obligațiile lor

Regula sumei
Dacă $A_1, \dots, A_k$ sunt două câte două disjuncte, atunci

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|.$$

Cazurile acoperă tot? Sunt disjuncte?

Regula produsului
Fiecare obiect se obține printr-o succesiune unică de k alegeri. Dacă pasul i are exact r_i posibilități, *oricare ar fi* alegerile anterioare, numărul obiectelor este $r_1 r_2 \cdots r_k$.

Lista posibilităților se poate schimba; numărul lor, nu.

Numere de trei cifre distincte

	cifra sutelor	cifra zecilor	cifra unităților
posibilități	9	9	8
	fără 0	≠ prima, inclusiv 0	≠ primele două

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

Întrebare

Cifrele permise la al doilea pas depind de prima alegere. De ce putem totuși înmulți?

ÎNCERCAȚI

Câte numere de trei cifre distincte sunt pare?

Unde nu se mai aplică regula produsului

Sute, zeci, unități

Cifra unităților: 5, 4 sau 3 posibilități, după câte cifre pare au fost folosite.

$9 \cdot 9 \cdot 5$ numără prea mult.

Unități, sute, zeci

Cifra sutelor: 9 posibilități dacă ultima cifră este 0, altfel 8.

Tot nu este constant.

Remediul

Schimbăm ordinea alegerilor sau împărțim în cazuri în care numărul posibilităților devine constant.

Cazuri, apoi produs

	unități	sute	zeci	total
ultima cifră 0	1	9	8	72
ultima cifră 2, 4, 6, 8	4	8	8	256
numere pare				328

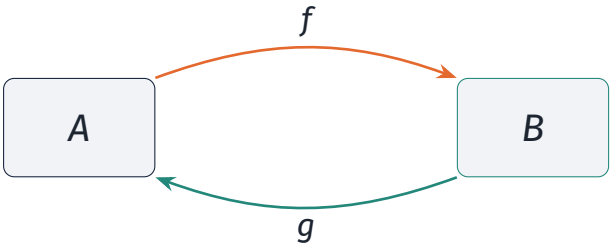
Verificare

Impare: $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$, fără cazuri. Împreună: $328 + 320 = 648$.

Cursul 2 · partea 3

Bijecții

Cum certificăm o bijecție



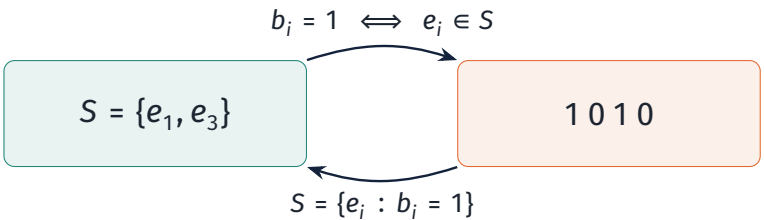
$g(f(a)) = a$ pentru orice $a \in A$
$\Rightarrow$ f este injectivă

$f(g(b)) = b$ pentru orice $b \in B$
$\Rightarrow$ f este surjectivă

Nu ajunge o singură egalitate: dacă f adaugă mereu un 0, iar g șterge ultima cifră, atunci $g(f(u)) = u$, dar $f(g(01)) = 00$.

Submulțimi și șiruri binare

Fixăm o ordine: $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.



O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi.

Numărul elementelor lui S = numărul cifrelor 1 din șir.

Bitul de paritate

lungime 2	număr par de 1
00	000
01	011
10	101
11	110

Propoziție

Pentru $n \geq 1$, exact 2^{n-1} șiruri binare de lungime n au un număr par de cifre 1.

f: adaugă cifra care face par numărul cifrelor 1.
g: șterge ultima cifră.

Întrebare

Ce cifră adăugăm șirului 1011?

Demonstrația: ambele compuneri

- $g(f(u)) = u$: ștergem exact cifra adăugată.
- $f(g(v)) = v$: dacă v are un număr par de cifre 1, ultima sa cifră este **impusă** de primele $n - 1$.
- $n = 1$: șirul vid $\mapsto 0$. $n = 0$: un singur șir (vid), cu zero cifre 1; formula nu se aplică.

Transmiterea datelor

Dacă se alterează o singură cifră, numărul cifrelor 1 devine impar: eroarea este detectată, chiar dacă nu știm unde s-a produs.

Cursul 2 · partea 4

Fibre și împărțiri

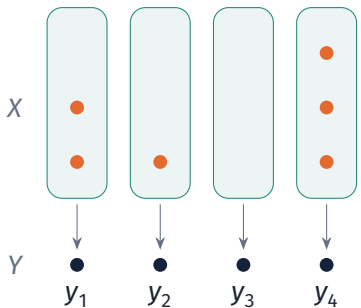
Fibrele unei funcții

Pentru $f\colon X \to Y$ și $y \in Y$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

În general, o fibră poate fi vidă (ca deasupra lui y_3); notația nu cere ca f să fie inversabilă.

Descrieri → obiecte: fibrele sunt clasele de echivalență ale descrierilor, iar f este proiecția canonică; nicio fibră nu este vidă.



Fibre de mărimi 2, 1, 0, 3.

Formula fibrelor

Teoremă
Pentru orice funcție $f\colon X \to Y$ între mulțimi finite,

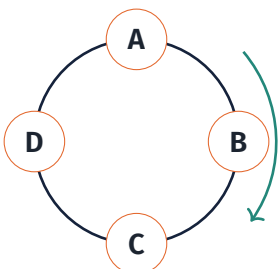
$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|.$$

Fibrele acoperă X și sunt două câte două disjuncte.

Regula împărțirii
Dacă *fiecare* fibră are exact $r \geq 1$ elemente, atunci $|X| = r\,|Y|$, deci $|Y| = |X|/r$.

Ipoteza privește toate elementele lui Y. Dacă doar fibrele nevide au câte r elemente: $|X| = r\,|f(X)|$.

La masa rotundă



Ne interesează doar vecinul din dreapta al fiecăruia.

ABCD, *BCDA*, *CDAB*, *DABC*: aceeași așezare.

$n \geq 1$ persoane distincte

Fiecare așezare are exact n liste:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Fără împărțire: citim mereu de la *A*, un *reprezentant canonic* al fiecărei fibre.

Înapoi la domino și la șiruri

domino	șiruri de lungime 3
$49 = 7 \cdot 1 + 21 \cdot 2$	$8 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2$

Împărțirea la 2 cerea ca *toate* fibrele să aibă două elemente.

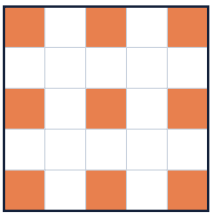
Reprezentantul canonic al unei piese: (a, b) cu $a \le b$, adică cele 28 de căsuțe de pe diagonală și de deasupra ei.

În notițe: o involuție cu F puncte fixe are $(|X| + F)/2$ clase. La domino, $(49 + 7)/2 = 28$.

Cursul 2 · partea 5

Principiul cutiei

Răspunsul la quiz: B



cele 9 pătrățele speciale



gaura în centru

Orice triomino în L stă într-un pătrat 2 × 2, care conține exact un pătrățel special.

Cele 8 piese acoperă cel mult 8 dintre cele 9, deci gaura este specială (ca la colțurile tablei 3 × 3).

Fiecare dintre cele 9 poziții admite o pavare.

A: condiție necesară, nu suficientă. D: teorema nu spune nimic despre alte table. Pe tabla 7 × 7 merge orice poziție a găurii.

Cea mai mare fibră

Principiul cutiei
Dacă $f\colon X \to Y$, $|X| = N$ și $|Y| = m \geq 1$, atunci o fibră are cel puțin $\lceil N/m \rceil$ elemente. Dacă $N > m$, f nu este injectivă.



Demonstrația. Fie M mărimea celei mai mari fibre. Formula fibrelor dă

$$N = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq m\,M,$$

deci $M \geq N/m$; fiind întreg, $M \geq \lceil N/m \rceil$.

Marginea nu poate fi îmbunătățită



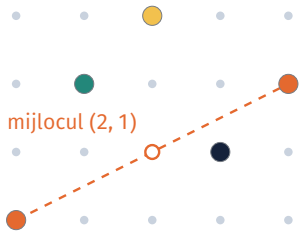
$N = 7$ obiecte, $m = 3$ cutii: $\lceil 7/3 \rceil = 3$

Distribuția cea mai uniformă

Scriem $N = qm + s$, cu $0 \le s < m$: câte $q+1$ obiecte în s cutii, câte q în celelalte. Cea mai plină cutie are exact $\lceil N/m \rceil$ obiecte.

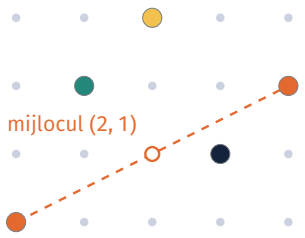
Forma simplă ($N > m$) a apărut în S1.2: în produsul $m(m-1)\cdots(m-N+1)$ apare factorul $m - m = 0$.

Alegem cutiile: puncte cu coordonate întregi



Dintre oricare cinci puncte cu coordonate întregi, două determină un segment al cărui mijloc are coordonate întregi.

Alegem cutiile: puncte cu coordonate întregi



Dintre oricare cinci puncte cu coordonate întregi, două determină un segment al cărui mijloc are coordonate întregi.

Cutiile: parităţile coordonatelor, patru valori. Aceeași paritate $\Rightarrow$ $x_1 + x_2$ și $y_1 + y_2$ pare.

Patru puncte nu ajung:
(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1).

Arta alegerii cutiilor

Puține etichete, ca să forțăm o coincidență; o coincidență care spune ceva util.

Cursul 2 · partea 6

O provocare

Olimpiada Internațională de Matematică, 1972

Problema 1

Din orice mulțime de zece numere naturale distincte, de câte două cifre, se pot alege două submulțimi disjuncte și nevide cu aceeași sumă a elementelor.

De exemplu, pentru $\{10, 11, \ldots, 19\}$:

Dar pentru

$$\{25,\ 40,\ 50,\ 60,\ 71,\ 77,\ 80,\ 82,\ 83,\ 84\}?$$

Și pentru orice altă mulțime de zece numere? Avem nevoie de un argument, nu de o căutare.

Olimpiada Internațională de Matematică, 1972

Problema 1

Din orice mulțime de zece numere naturale distincte, de câte două cifre, se pot alege două submulțimi disjuncte și nevide cu aceeași sumă a elementelor.

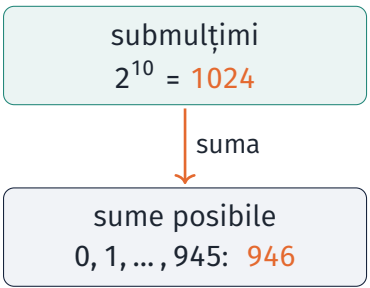
De exemplu, pentru $\{10, 11, \ldots, 19\}$: $\{10, 13\}$ și $\{11, 12\}$.

Dar pentru

$$\{25,\ 40,\ 50,\ 60,\ 71,\ 77,\ 80,\ 82,\ 83,\ 84\}?$$

Și pentru orice altă mulțime de zece numere? Avem nevoie de un argument, nu de o căutare.

Câte submulțimi? Câte sume?



$90 + 91 + \cdots + 99 = 945$.

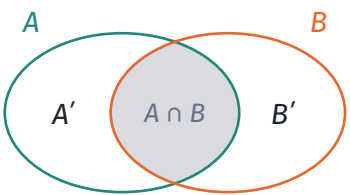
$1024 > 946$: funcția „suma elementelor” nu este injectivă.

Ideea

Există două submulțimi *distincte*, $A \neq B$, cu aceeași sumă.

Încă nu am terminat: A și B pot avea elemente comune.

Eliminăm elementele comune



$A' = A \setminus B$, $B' = B \setminus A$.

Scădem din ambele sume suma lui $A \cap B$: A' și B' au **aceeași sumă** și sunt **disjuncte**.

Nevide? Dacă $A' = \emptyset$, suma lui B' este 0; numerele fiind pozitive, $B' = \emptyset$, deci $A = B$.

Ipoteze folosite: zece numere (2^{10} submulțimi); două cifre (sume mărginite); numere pozitive (submulțimi nevide).

PENTRU CURIOȘI

Este nevoie de zece numere?

Nouă numere? Opt numere?

Nouă numere

$2^9 = 512$ submulțimi, dar sumele pot fi oricare dintre $0, 1, \ldots, 855$: principiul cutiei *nu ajunge*.

Afirmația rămâne totuși adevărată; un argument cu varianța va apărea mai târziu în curs.

Opt numere

Afirmația este falsă: cele 256 de sume ale submulțimilor lui

$$\{40, 60, 71, 77, 80, 82, 83, 84\}$$

sunt toate distincte.

Contraexemplul este un certificat: se verifică prin calculul celor 256 de sume.

Problema lui Erdős (deschisă)

Numerele naturale nenule $a_1 < \cdots < a_n$ au proprietatea că submulțimi diferite au sume diferite. Cât de mic poate fi a_n?

n	2^{n-1}	cel mai mic a_n
4	8	7 $\{3, 5, 6, 7\}$
8	128	84
9	256	161

Principiul cutiei: $a_n \geq \dfrac{2^n - 1}{n}$.

Conjectura lui Erdős

$a_n \geq c \cdot 2^n$ pentru o constantă $c > 0$. Premiu: 500 de dolari. Problema este deschisă.

Puterile lui 2 merg, dar nu sunt optime. Iar $161 > 99$: încă un motiv pentru care nouă numere de două cifre ajung.

Un argument de auditat

Un coleg propune

Câte numere de trei cifre au cifrele strict crescătoare? Fiecare mulțime de trei cifre distincte apare în 3! = 6 numere, dintre care unul are cifrele crescătoare. Deci 648/6 = 108.

Un argument de auditat

Un coleg propune

Câte numere de trei cifre au cifrele strict crescătoare? Fiecare mulțime de trei cifre distincte apare în 3! = 6 numere, dintre care unul are cifrele crescătoare. Deci 648/6 = 108.

Funcția număr ↦ mulțimea cifrelor: fibre de 6 elemente pentru mulțimile fără 0, dar doar de 4 pentru cele cu 0.

$$648 = 6 \cdot 84 + 4 \cdot 36.$$

Un argument de auditat

Un coleg propune

Câte numere de trei cifre au cifrele strict crescătoare? Fiecare mulțime de trei cifre distincte apare în 3! = 6 numere, dintre care unul are cifrele crescătoare. Deci 648/6 = 108.

Funcția număr ↦ mulțimea cifrelor: fibre de 6 elemente pentru mulțimile fără 0, dar doar de 4 pentru cele cu 0.

$$648 = 6 \cdot 84 + 4 \cdot 36.$$

Mulțimile cu 0 nu dau niciun număr crescător: răspunsul este 84. Încă un cât întreg care nu dovedea nimic.

Patru întrebări de audit

1. **Obiectele:** ce numărăm și când sunt două descrieri același obiect?
2. **Descompunerea:** cazuri care acoperă tot și sunt disjuncte; la produs, același număr de posibilități.
3. **Corespondența:** inversă verificată în ambele sensuri sau fibre de mărime cunoscută?
4. **Cazurile-limită:** valori mici, mulțimea vidă, marginea ipotezelor.

Bilet de ieșire

Câte piese ar avea un joc de domino cu 0–9 puncte pe fiecare jumătate? Justificați în două rânduri.