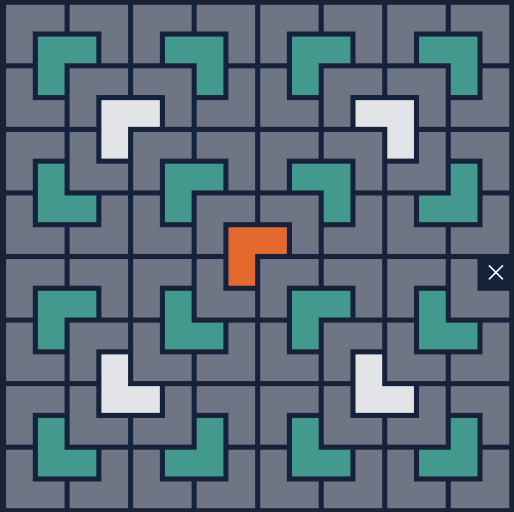
Cursul 3

Dubla numărare și coeficienții binomiali

Metode ale matematicii discrete și aplicații

George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027



Quiz · trei minute

Câte numere de trei cifre au cifrele în ordine *strict descrescătoare*, cum sunt 952 sau 310?

A. 84, ca și numerele cu cifrele strict crescătoare.

B. $108 = 648/6$.

C. 120.

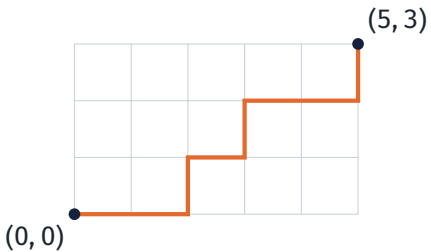
D. $720 = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Pe o foaie scrieți numai numele și litera aleasă.

Cursul 3 · partea 1

Drumuri și submulțimi

Câte drumuri?



Întrebare

Un drum de lungime minimă de la $(0, 0)$ la $(5, 3)$ are opt pași, spre dreapta sau în sus. Câte asemenea drumuri există?

Ce descriere a unui drum face numărarea ușoară?

Trei descrieri, aceeași informație



Un șir de 8 litere cu exact 3 litere S $\longleftrightarrow$ o submulțime cu 3 elemente a lui $\{1, \dots, 8\}$.

Ideea

Numărul drumurilor este numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 8 elemente: $\binom{8}{3}$.

Coeficientul binomial

Definiție
$\binom{n}{k}$ este numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente.
Pentru $k < 0$ sau $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$.

Listele de k elemente distincte: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Funcția „uită ordinea” are **toate fibrele de mărime $k!$**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (0 \le k \le n).$$

$\binom{8}{3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ de drumuri.

$k = 0$: lista vidă, submulțimea vidă, $0! = 1$.

Răspunsul la quiz: C

Un număr cu cifrele strict descrescătoare este determinat de **mulțimea cifrelor** sale: $\{0, 1, 3\} \mapsto 310$.

Orice mulțime de trei cifre distincte dă exact un asemenea număr (cea mai mare cifră nu este 0):

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120.$$

Comparație: cifre strict crescătoare (cursul 2)

Mulțimile care conțin 0 nu dau niciun număr: $\binom{9}{3} = 84$.

A: simetrie presupusă; B: 648/6, fibre inegale; D: liste ordonate.

Două proprietăți citite pe obiecte

Complementul

$S \mapsto$ complementul lui S este o bijecție:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Pe drumuri: schimbăm D cu S.

Toate submulțimile

Împărțite după mărime:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

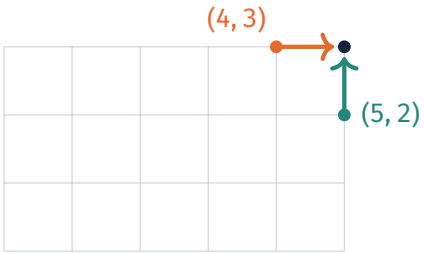
Șirurile binare din cursul 2.

Niciun factorial nu a fost necesar: ambele egalități se citesc pe obiecte.

Cursul 3 · partea 2

Identitatea lui Pascal

Ultimul pas



Un drum ajunge în $(5, 3)$ fie din $(4, 3)$, fie din $(5, 2)$:

$$\binom{8}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{2}.$$

$56 = 35 + 21.$

Întrebare

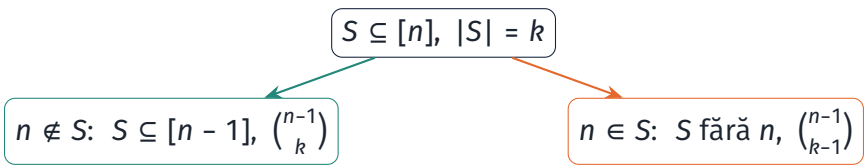
Același argument, pentru submulțimile cu k elemente ale lui $[n]$?

Identitatea lui Pascal

Teoremă

Pentru $n \geq 1$ și orice întreg k,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$



Clasele sunt disjuncte și acoperă familia; $k = 0$ sau $k = n$: o clasă este vidă.

O demonstrație devine o rețetă

Pentru $0 < k < n$:

$$C(n,k) = C(n-1,k) \;\sqcup\; \big\{T \cup \{n\} : T \in C(n-1,k-1)\big\}.$$

Procedura pentru (n,k)
$k < 0$ sau $k > n$: nimic. $k = 0$: doar $\varnothing$. $k = n > 0$: doar $[n]$.
Altfel: lista pentru $(n-1,k)$, apoi lista pentru $(n-1,k-1)$, cu n adăugat.

Ca în cursul 1: demonstrația pavării a devenit o procedură de pavare.

Cazul $(4, 2)$

$4 \notin S$

$\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\}$

$4 \in S$

$\{1, 4\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}$

Întrebare

De ce procedura se termină, produce toate submulțimile și nu repetă niciuna?

A ști *câte* obiecte sunt și a le *produce* pe toate sunt sarcini diferite.

Cursul 3 · partea 3

O mulțime, două numărări

Care este mulțimea comună?

$A \cap B = \emptyset$, $|A| = p$, $|B| = q$;

$$F = \{S \subseteq A \cup B : \ |S| = r\}.$$

Direct: $|F| = \binom{p+q}{r}$.

A doua numărare: clasificăm după $j = |S \cap A|$; atunci $|S \cap B| = r - j$.

Ideea

Clasa j: perechile $(S \cap A,\ S \cap B)$, cu inversa „reuniunea”: $\binom{p}{j}\binom{q}{r-j}$ elemente.

Identitatea lui Vandermonde

Teoremă

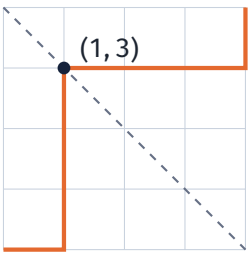
Pentru $p, q, r \geq 0$,

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{p}{j}\binom{q}{r-j}.$$

Dubla numărare cere: **mulțimea comună**, clasele disjuncte care o acoperă și sensul fiecărui termen.

Termenii imposibili ($j > p$ sau $r - j > q$) sunt zero prin convenție.

Pe drumuri: punctul de traversare



Un drum spre $(4, 4)$ traversează dreapta $x + y = 4$ exact o dată, în $(j, 4 - j)$.

Cele două bucăți: $\binom{4}{j}$ și $\binom{4}{4-j} = \binom{4}{j}$.

$$\sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j}^2 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}.$$

În general: $\sum_j \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$. Pătratul are un sens: două bucăți din mulțimi disjuncte.

Pentru acasă: crosa de hochei

Întrebare

Numărați submulțimile cu $k+1$ elemente ale lui $[n+1]$ după *cel mai mare* element și demonstrați

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Spuneți întâi care este mulțimea comună și ce numără fiecare termen.

Cursul 3 · partea 4

Stele și separatoare

Obiecte identice, cutii etichetate

N obiecte identice în $m \geq 1$ cutii etichetate; cutiile goale sunt permise.

$$(x_1, \dots, x_m), \qquad x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}, \qquad x_1 + \cdots + x_m = N.$$

$$(2, 0, 3) \qquad \text{și} \qquad (0, 2, 3)$$

Întrebare

De ce sunt distribuții diferite? Ce informație trebuie codificată?

Un vector devine un șir

$$(2, 0, 3, 1) \quad \longmapsto \quad \star\star \,||\, \star\star\star \,|\, \star$$



N stele și m – 1 separatoare. **Două separatoare alăturate**: o cutie goală.

Citiți șirul | ⋆⋆ |: ce vector este?

Teorema stelelor și separatoarelor

Teoremă

Pentru $N \geq 0$ și $m \geq 1$, numărul soluțiilor întregi nenegative ale ecuației $x_1 + \cdots + x_m = N$ este

$$\binom{N + m - 1}{m - 1} = \binom{N + m - 1}{N}.$$

Vector → șir, șir → vector (blocurile goale incluse): **inverse una alteia**.

Un șir = pozițiile celor $m - 1$ separatoare printre $N + m - 1$ poziții.

$N = 0$: numai separatoare; $m = 1$: numai stele; $N = 0$, $m = 1$: șirul vid, $\binom{0}{0} = 1$.

Praguri minime

Opt jetoane identice, trei cutii etichetate:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,\ x_i \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{10}{2} = 45.$$

Fiecare cutie primește măcar un jeton: $y_i = x_i - 1$,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5,\ y_i \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{7}{2} = 21.$$

Ideea

Pragurile $x_i \geq a_i$ dispar prin translație: rămâne suma $N - \sum a_i$ (dacă este ≥ 0).

O limită superioară, $x_1 \leq 3$, nu dispare: cursul 4.

Alegeri cu repetiție

r elemente din $[n]$, cu repetiție, fără ordine = multiplicitățile $x_1 + \cdots + x_n = r$:

$$\binom{n + r - 1}{r} \text{ alegeri.}$$

Reprezentant: $1 \le a_1 \le \cdots \le a_r \le n$. Altă codificare: $b_i = a_i + i - 1$,

$$1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_r \le n + r - 1.$$

$(1, 1, 3) \longmapsto (1, 2, 5)$, inversa: $a_i = b_i - i + 1$.

Stele: $(1, 1, 3)$ este $\star\star \mid\mid \star$ sau submulțimi ale lui $[n + r - 1]$: același număr.

Dominoul revine

O piesă = o alegere cu repetiție a două numere dintre $0, 1, \ldots, 6$: $n = 7$, $r = 2$.

$$(a, b),\ a \le b \quad \longmapsto \quad (a, b+1),\ a < b+1 \le 7.$$

$$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Acum împărțirea la 2 este legitimă: *toate* perechile de numere distincte au două ordonări. Dublele nu mai trebuie separate.

Cursul 3 · partea 5

Un argument de auditat

„Împărțim la $r!$, fiindcă ordinea nu contează”

Pentru $n = r = 2$: șirurile 11, 12, 21, 22; calculul propus dă $2^2/2! = 2$.

{11}

{12, 21}

{22}

Fibrele au mărimile 1, 2, 1: împărțirea presupune că *fiecare* alegere are $r!$ descrieri.

O alegere cu multiplicitățile $x_1, \dots, x_n$ are $\dfrac{r!}{x_1! \cdots x_n!}$ descrieri.

Corect: $\binom{n+r-1}{r} = \binom{3}{2} = 3$. Un cât întreg nu certifică nimic.

Cursul 3 · partea 6

Provocare: buletinele de vot

ÎNCERCAȚI

A a obținut 3 voturi, B a obținut 2. Buletinele se numără într-o ordine aleatoare. În câte dintre cele 10 ordini este A *strict* în frunte pe tot parcursul numărării?

Cazuri mici

$a = 3$, $b = 2$: zece șiruri;
bune: *AAABB*, *AABAB*.
AABBA: egal după patru buletine.

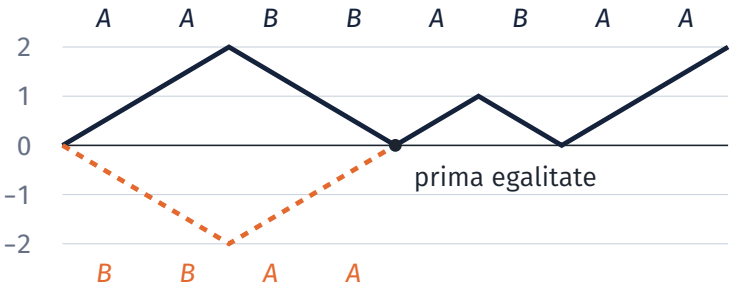
$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$a = 2$, $b = 1$: trei șiruri;
bun: *AAB*.

$$\frac{1}{3}$$

Întrebare
Ghiciți probabilitatea pentru a și b oarecare, $a > b$.

Reflexia



Un șir rău care începe cu A $\longleftrightarrow$ un șir care începe cu B: reflectăm porțiunea de până la **prima egalitate**.

Reflexia păstrează numărul literelor și este propria ei inversă. Unde folosim $a > b$?

Teorema buletinelor de vot

Teoremă

Pentru $a > b \geq 0$, numărul ordinilor în care A este strict în frunte tot timpul este

$$\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

Probabilitatea: $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Șirurile care încep cu A, minus cele rele; cele rele sunt tot atâtea câte încep cu B.

$a = 3$, $b = 2$: $\binom{4}{2} - \binom{4}{3} = 6 - 4 = 2$, ca în cazul mic. Pentru $a = b$ formula dă 0.

Pentru curioși: numerele lui Catalan

$a = n + 1$, $b = n$, apoi ștergem primul A: șirurile cu n litere A și n litere B în care A nu este *niciodată în urmă*.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}: \qquad 1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ \ldots$$

Drumuri care nu coboară sub diagonală, paranteze corecte, triangulări, arbori binari.

Revin în cursul 6, pe altă cale: aceeași formulă, o explicație combinatorică și una algebrică.

Bilet de ieșire

Întrebare

Câte soluții întregi nenegative are $x + y + z = 10$ cu $x \geq 2$? Codificați soluția $(3, 0, 7)$ cu stele și separatoare.

Într-o propoziție: de ce condiția $x \leq 2$ nu se tratează la fel?

Mai departe: limitele superioare cer o metodă nouă.