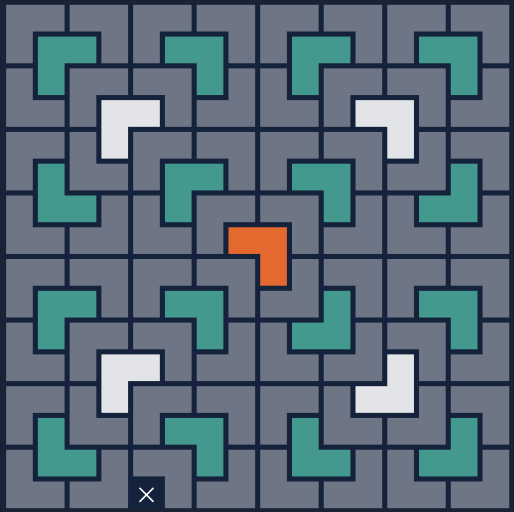
Cursul 4

Includere–excludere și restricții

Metode ale matematicii discrete și aplicații



George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027

Quiz · trei minute

Zece bomboane identice se împart la trei copii, fiecare copil primind cel puțin o bomboană. În câte moduri?

A. $\binom{12}{2} = 66$.

B. $\binom{9}{2} = 36$.

C. 3^{10}.

D. $\binom{10}{3} = 120$.

Pe o foaie scrieți numai numele și litera aleasă.

Cursul 4 · partea 1

Când scădem prea mult

Trei simboluri, patru poziții

Întrebare

Câte șiruri de lungime 4 cu simbolurile $0, 1, 2$ conțin fiecare simbol cel puțin o dată?

Fără nicio condiție: $3^4 = 81$.

Un șir poate începe cu 0. Ce scădem? Și ce scădem de două ori?

De la 33 la 36

Lipsește un simbol fixat: $2^4 = 16$ șiruri. Scădem pentru fiecare simbol:

$$81 - 3 \cdot 16 = 33.$$

Șirurile 0000, 1111, 2222 au fost scăzute **de două ori**; le adunăm înapoi:

$$81 - 48 + 3 = 36.$$

Control: un simbol apare de două ori, $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 36$. Dar numai pentru lungimea 4.

Mulțimea de bază și încălcările

U: obiecte ușor de numărat. $A_i \subseteq U$: obiectele care **încalcă** restricția i.

Ideea

Obiectele admisibile: cele din U aflate în afara reuniunii; numărul lor este $|U| - |A_1 \cup \cdots \cup A_m|$.

Șiruri: U are 81 de elemente; A_i = șirurile fără simbolul i; $A_0 \cap A_1 = \{2222\}$.

Un obiect poate încălca mai multe restricții deodată: suma $|A_1| + \cdots + |A_m|$ scade prea mult.

Două mulțimi, trei mulțimi

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Un element din exact două mulțimi: $2 - 1 = 1$. Din toate trei: $3 - 3 + 1 = 1$.

Întrebare

Fără termenul intersecției triple, ce ar da formula pentru $A_1 = A_2 = A_3 = \{u\}$?

Cursul 4 · partea 2

Indicatori și formula generală

Indicatorul unei mulțimi

Pentru $A \subseteq U$ și $x \in U$:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad |A| = \sum_{x \in U} \mathbf{1}_A(x).$$

Ideea

$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\,\mathbf{1}_B(x)$: apartenența devine un calcul cu 0 și 1.

Doi indicatori

$a = \mathbf{1}_{A_1}(x)$, $b = \mathbf{1}_{A_2}(x)$:

a	b	$(1-a)(1-b)$	x este …
0	0	1	admisibil
1	0	0	interzis de A_1
0	1	0	interzis de A_2
1	1	0	interzis de ambele

$$(1-a)(1-b) = 1 - a - b + ab.$$

Termenul ab este corecția pentru obiectele din ambele mulțimi.

Un produs pentru m restricții

Pentru $x \in U$:

$$\prod_{i=1}^{m}\bigl(1 - \mathbf{1}_{A_i}(x)\bigr) = \begin{cases} 1, & x \text{ nu încalcă nicio restricție,} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Dezvoltăm: din fiecare factor alegem 1 sau $-\mathbf{1}_{A_i}(x)$; J = indicii celei de-a doua alegeri.

$$\prod_{i=1}^{m}\bigl(1 - \mathbf{1}_{A_i}(x)\bigr) = \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{|J|}\,\mathbf{1}_{A_J}(x), \qquad A_J = \bigcap_{j\in J} A_j,\ A_\varnothing = U.$$

Apoi însumăm după $x \in U$.

Principiul includerii și excluderii

Teoremă

$$|U| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{|J|}\,|A_J|, \qquad \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{\varnothing\neq J\subseteq[m]} (-1)^{|J|+1}\,|A_J|.$$

Termenul $J = \varnothing$ este $|U|$. $m = 0$: formula spune $|U| = |U|$.

Nicio ipoteză despre A_i: pot fi egale, disjuncte, oricum altfel.

Semnele, obiect cu obiect

x încalcă exact $t \geq 1$ restricții $\Rightarrow$ x se află în $\binom{t}{j}$ intersecții a câte j mulțimi:

$$\sum_{j=0}^{t} (-1)^j \binom{t}{j} = (1 - 1)^t = 0.$$

x nu încalcă nimic $\Rightarrow$ contribuie numai prin $J = \varnothing$: 1.

Schema unei aplicații

U; fiecare A_i exact; pentru J *fixat*, numărăm A_J = obiectele care încalcă **cel puțin** restricțiile din J; abia apoi însumăm.

Dacă $|A_J| = c_j$ depinde numai de $|J| = j$: $\sum_j (-1)^j \binom{m}{j} c_j$.

Cursul 4 · partea 3

Surjecții

Fiecare valoare trebuie atinsă

$f : [n] \to [m]$ este un șir de n valori din $[m]$; surjectivă = toate valorile apar.

U: toate funcțiile, $|U| = m^n$. A_i: funcțiile care nu iau valoarea i.

Ideea

f este surjectivă exact când nu aparține niciunui A_i.

Problema de deschidere: surjecțiile $[4] \to [3]$.

O intersecție fixată

$J \subseteq [m]$, $|J| = j$. În A_J lipsesc valorile din J; fiecare argument alege dintre $m - j$ valori:

$$|A_J| = (m - j)^n.$$

Celelalte valori *pot* lipsi și ele: A_J nu cere „exact j valori lipsă”.

Întrebare

Câte mulțimi J cu $|J| = j$ există? De ce putem grupa termenii după j?

Formula surjecțiilor

Teoremă

Numărul surjecțiilor $[n] \to [m]$ este $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n$ $\quad (0^0 = 1)$.

Cinci sarcini distincte, trei echipe etichetate, fiecare cu cel puțin o sarcină:

$$3^5 - \binom{3}{1} 2^5 + \binom{3}{2} 1^5 - \binom{3}{3} 0^5 = 243 - 96 + 3 - 0 = 150.$$

Nu împărțim la 3! (echipele au nume). $n < m$: suma este 0; $n = m$: suma este $n!$.

Cursul 4 · partea 4

Deranjamente

Problema pălăriilor (Montmort, 1708)

n persoane își lasă pălăriile la garderobă și primesc înapoi câte una, la întâmplare.

Întrebare

Care este probabilitatea ca *nimeni* să nu primească propria pălărie? Pentru n mare: tinde la 0, la 1 sau la altceva?

Permutare σ a lui $[n]$; punct fix: $\sigma(i) = i$; *deranjament*: fără puncte fixe; D_n.

U: cele $n!$ permutări; $A_i = \{\sigma : \sigma(i) = i\}$.

Fixăm punctele din J

$J \subseteq [n]$, $|J| = j$. O permutare din A_J fixează J și permută *între ele* celelalte $n - j$ elemente:

$$|A_J| = (n - j)!.$$

Pot apărea și alte puncte fixe: intersecția cere **cel puțin** punctele fixe din J.

$$D_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)! = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Primele valori

$$D_4 = 24 - 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1 = 9.$$

n	0	1	2	3	4	5	6
D_n	1	0	1	2	9	44	265
$D_n/n!$	1	0	0,5	0,333	0,375	0,367	0,368

Pentru $n = 3$: $(2, 3, 1)$ și $(3, 1, 2)$. La $j = 3$, în D_4: intersecția conține identitatea, $1! = 1$.

Surpriza: $1/e$

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \longrightarrow \frac{1}{e} \approx 0{,}3679.$$

Ideea

Cu 10 sau cu un milion de pălării, șansa ca nimeni să nu primească pălăria sa este cam 37%.

Pronosticul vostru a fost 0? 1? Probabilitatea nu depinde, practic, de n.

O formulă închisă

Teoremă
Pentru $n \geq 1$, D_n este întregul cel mai apropiat de $n!/e$.

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{j \geq n+1} \frac{(-1)^j}{j!} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \quad (n \geq 2).$$

Serie alternantă: restul este cel mult primul termen omis. $n = 1$: $1/e < 1/2$.

$5!/e \approx 44{,}15 \to 44$; $6!/e \approx 264{,}87 \to 265$; $7!/e \approx 1854{,}1 \to 1854$.

Pentru curioși: exact r puncte fixe

Alegem punctele fixe, apoi cerem ca restul să fie un deranjament:

$$\binom{n}{r} D_{n-r}, \qquad \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D_{n-r} = n!.$$

Probabilitatea de exact r puncte fixe: $\dfrac{1}{r!} \cdot \dfrac{D_{n-r}}{(n-r)!} \longrightarrow \dfrac{e^{-1}}{r!}$ (Poisson).

Numărul mediu de puncte fixe este exact 1, pentru orice $n \geq 1$: cursul 8.

Cursul 4 · partea 5

Distribuții cu capacități

Răspunsul la quiz: B

Fiecare copil primește o bomboană, restul de 7 se împart liber:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7,\ y_i \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{9}{2} = 36.$$

A: pragul uitat; C: bomboane distincte; D: $\binom{10}{3}$ nu numără aici nimic.

Întrebare

Și dacă fiecare copil primește *cel mult patru* bomboane?

Încălcarea începe la $b_i + 1$

U: vectorii $(x_1, \dots, x_m)$ nenegativi cu suma N. Cerem $x_i \le b_i$.

$$A_i = \{x \in U : \ x_i \ge b_i + 1\}.$$

Pentru J fixat: $y_i = x_i - (b_i + 1)$ dacă $i \in J$, $y_i = x_i$ altfel. Suma rămasă:

$$R_J = N - \sum_{j \in J} (b_j + 1), \qquad |A_J| = H_m(R_J),$$

$$H_m(R) = \begin{cases} \binom{R+m-1}{m-1}, & R \ge 0, \\ 0, & R < 0. \end{cases}$$

Translația este reversibilă; $R_J < 0$ înseamnă intersecție vidă.

Capacități prescrise

Teoremă
Numărul soluțiilor lui $x_1 + \cdots + x_m = N$ cu $0 \le x_i \le b_i$ este

$$\sum_{J \subseteq [m]} (-1)^{|J|} \, H_m\Big(N - \sum_{j \in J} (b_j + 1)\Big).$$

Capacități egale: termenii se grupează după $|J|$. Capacități diferite: nu.

Pragurile inferioare se elimină *înainte*, prin translație.

Zece bomboane, porții între 1 și 4

După $y_i = x_i - 1$: suma 7, $0 \le y_i \le 3$, încălcarea $y_i \ge 4$.

J	suma rămasă	$\lvert A_J \rvert$
$\varnothing$	7	$H_3(7) = 36$
$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	3	$H_3(3) = 10$ fiecare
$\lvert J \rvert \ge 2$	≤ -1	0

$36 - 3 \cdot 10 + 0 = 6$: $(4,4,2),\ (4,2,4),\ (2,4,4),\ (4,3,3),\ (3,4,3),\ (3,3,4).$

Capacități diferite: 7 jetoane, capacitățile 2, 3, 4

Întrebare
Pragurile de încălcare? Care intersecții sunt vide? Decideți *înainte* de calcul.

J	suma rămasă	$\lvert A_J \rvert$
$\varnothing$	7	36
$\{1\},\{2\},\{3\}$	4, 3, 2	15, 10, 6
$\{1,2\}$	0	1
$\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$	negativă	0

$36 - 31 + 1 = 6$. Control după prima coordonată: $1 + 2 + 3$.

Cursul 4 · partea 6

Un argument de auditat

„Cel puțin un punct fix”

Argument propus: „Alegem punctul fix (n moduri) și permutăm liber restul (($n-1$)! moduri): $n \cdot (n-1)! = n!$ permutări cu cel puțin un punct fix.”

Întrebare

De ce este absurd rezultatul? Ce produce, de fapt, procedura descrisă?

Perechi, nu permutări

Procedura produce perechile (punct fix ales, permutare care îl fixează): o permutare cu t puncte fixe apare de t ori.

$n = 3$: identitatea de 3 ori, cele trei transpoziții câte o dată: 6 perechi, 4 permutări.

Ideea

Cel puțin un punct fix: $n! - D_n$. Exact un punct fix: $n\, D_{n-1}$.

Aceeași confuzie, „cel puțin” luat drept „exact”, poate apărea la orice intersecție A_J.

Bilet de ieșire

Întrebare
Câte soluții întregi are $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ cu $0 \le x_i \le 2$?

1. Precizați U și mulțimile A_i, cu pragul de încălcare.
2. Decideți ce intersecții sunt vide și calculați.

Mai departe: cursul 5, recurențe.