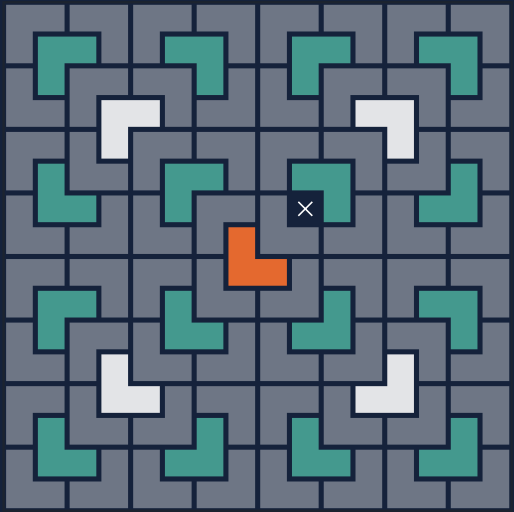
Cursul 5

Recurențe: modelare înainte de rezolvare

Metode ale matematicii discrete și aplicații

George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027



Quiz · cinci minute

Câte permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ nu au niciun punct fix?

A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 12

Pe o foaie scrieți numai numele și litera aleasă.

Răspunsul la quiz: C

$$D_4 = 24 - 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1 = 9, \qquad \frac{4!}{e} \approx 8{,}83.$$

Cele nouă deranjamente, ca șiruri de valori: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.

Astăzi nu mai eliminăm obiecte rele dintr-o mulțime mare: construim obiectele bune din obiecte mai mici. Deranjamentele revin, recursiv, în extensii.

Cursul 5 · partea 1

O restricție locală

Șiruri binare fără 11

Întrebare
Câte șiruri binare de lungime n nu conțin două simboluri 1 alăturate?

Pentru lungimea 4 (un șir poate începe cu 0):

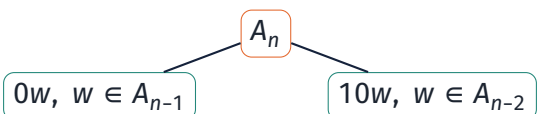
0000, 0001, 0010, 0100,
0101, 1000, 1001, 1010.

1, 2, 3, 5, 8: șirul pare cunoscut. Dar de unde vine fiecare termen?

Două prefixe, două bijecții

A_n: șirurile admisibile de lungime n, $a_n = |A_n|$. Pentru $n \geq 2$:

$$A_n = \underbrace{0\,A_{n-1}}_{\text{începe cu 0}} \;\dot{\cup}\; \underbrace{10\,A_{n-2}}_{\text{începe cu 1}}\,.$$



Ștergerea prefixului și adăugarea lui sunt construcții inverse; la îmbinare nu apare 11.

Începutul face parte din model

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 2, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

$a_0 = 1$: șirul vid este admisibil. Șirul 1 nu are prefixul 10: cazul $n = 1$ se numără separat.

Întrebare

De ce „ștergem primul simbol și îl punem la loc în două moduri”, adică $a_n = 2a_{n-1}$, nu numără corect?

Aceeași recurență, alți indici

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.

$$a_0 = 1 = F_2, \qquad a_1 = 2 = F_3 \quad \Longrightarrow \quad a_n = F_{n+2}.$$

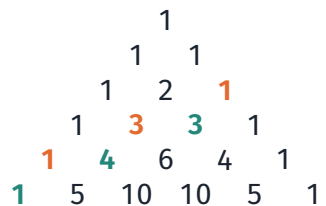
Ideea

Egalitatea vine din datele inițiale și din recurență, prin unicitate.

$a_5 = 13$, $a_6 = 21$. Deplasarea cu doi indici vine din condițiile inițiale, nu din recurență.

O identitate promisă la S2.4: diagonalele lui Pascal

Șirurile din A_n cu exact k simboluri 1 $\longleftrightarrow$ submulțimile cu k elemente ale lui $\{1, \dots, n\}$ fără numere consecutive: $\binom{n-k+1}{k}$ (S2.4). Deci $\sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k} = a_n = F_{n+2}$.



$n = 3$: $1 + 3 + 1 = 5 = a_3$

$n = 4$: $1 + 4 + 3 = 8 = a_4$

Aceeași mulțime, numărată prin recurență și prin dublă numărare.

Cursul 5 · partea 2

Ce determină o recurență?

Modelul și soluția au sarcini diferite

1. Ce numără u_n?
2. Ce descompunere, fără omisiuni și fără dublări, produce recurența?
3. Care sunt cazurile inițiale, numărate separat?

După fixarea recurenței și a datelor inițiale, termenii sunt determinați unul după altul.

Unicitatea, într-un rând

Dacă (u_n) și (v_n) au aceleași date inițiale și satisfac aceeași recurență:

$$u_0 = v_0,\ u_1 = v_1 \quad \Longrightarrow \quad u_n = v_n \quad \text{pentru orice } n.$$

Ideea

Inducția transmite egalitatea termenilor anteriori termenului următor. O formulă se demonstrează verificând datele inițiale și recurența, pentru toți indicii.

Pentru ordinul 2, pornind de la $n = 2$, o singură valoare inițială nu ajunge.

Ordinul 1: desfășurăm

$u_n = cu_{n-1} + d$ pentru $n \geq 1$:

$$u_1 = cu_0 + d,$$
$$u_2 = c^2u_0 + cd + d,$$
$$u_3 = c^3u_0 + c^2d + cd + d.$$

Întrebare

Ce formă are u_n? Cum o verificăm pentru orice n?

Suma geometrică și cazul $c = 1$

$$u_n = c^n u_0 + d \sum_{j=0}^{n-1} c^j \qquad \text{(sumă vidă pentru } n = 0\text{; inducție pentru orice } n\text{).}$$

Dacă $c \neq 1$: $u_n = c^n u_0 + d \dfrac{c^n - 1}{c - 1}$. Dacă $c = 1$: $u_n = u_0 + nd$.

$u_0 = 0,\ u_n = 3u_{n-1} + 2$ dă $u_n = 3^n - 1$; sau $v_n = u_n + 1$, $v_n = 3v_{n-1}$. La S3.1 veți folosi același truc.

Cursul 5 · partea 3

Ordinul 2 și rădăcinile

Căutăm soluții de forma r^n

Pentru $u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$, $n \geq 2$, $q \neq 0$:

$$r^n = pr^{n-1} + qr^{n-2} \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 - pr - q = 0.$$

Polinomul caracteristic. Lucrăm cu două rădăcini reale distincte; $r \neq 0$, deoarece $q \neq 0$.

Întrebarea rămasă pe tablă

Dacă r_1, r_2 sunt rădăcini, atunci r_1^n și r_2^n satisfac recurența, și la fel orice $A\, r_1^n + B\, r_2^n$.

Întrebare

Am găsit niște soluții. De ce nu mai există altele, oricare ar fi datele u_0, u_1?

Pauză: aproximativ 20 de minute.

Rădăcini distincte: potrivim datele

Candidatul $v_n = A\, r_1^n + B\, r_2^n$ satisface recurența. Pentru datele cerute:

$$A + B = u_0, \qquad A\, r_1 + B\, r_2 = u_1.$$

Determinantul este $r_2 - r_1 \neq 0$: există exact o pereche (A, B).

Ideea

v și u au aceleași date și aceeași recurență; unicitatea dă $u_n = v_n$.

Fibonacci: datele aleg combinația

$r^2 - r - 1 = 0$ are rădăcinile $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Pentru șirurile fără 11: $a_n = F_{n+2}$, deci alte ecuații pentru A, B: $A + B = 1$, $A\varphi + B\psi = 2$.

Pentru curioși: o formulă de rotunjire

$|\psi| < 1$, deci $\left|\psi^n/\sqrt{5}\right| \le 1/\sqrt{5} < 1/2$ pentru orice $n \ge 0$:

$$F_n = \text{întregul cel mai apropiat de } \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\varphi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55{,}004, \qquad \frac{\varphi^{30}}{\sqrt{5}} \approx 832\,040{,}00000.$$

Ca la deranjamente: pentru $n \ge 1$, D_n este întregul cel mai apropiat de $n!/e$.

Ipoteza „distincte” contează

Pentru $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$, polinomul este $(r-1)^2$.

$$u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \quad \Longrightarrow \quad u_n = u_0 + n(u_1 - u_0).$$

Două copii ale lui 1^n nu produc șirul $u_n = n$; diferențele constante da. Cazul general: în extensii.

Cursul 5 · partea 4

Ce trebuie să țină minte o stare

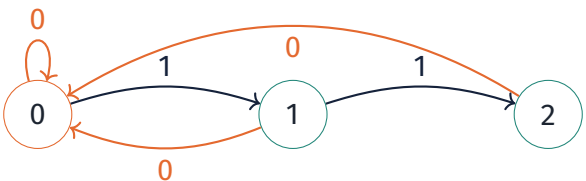
Evităm 111: ultimul simbol nu ajunge

După 01 putem adăuga 1; după 11 nu putem.

Întrebare
Ce informație despre sfârșitul șirului decide toate prelungirile?

Lungimea blocului final de simboluri 1: stările 0, 1, 2.

Tranzițiile sunt exacte



Din starea 2, simbolul 1 este interzis. Șirul vid pornește în starea 0.

Trei egalități de prelungire

x_n, y_n, z_n numără șirurile de lungime n aflate în stările 0, 1, 2.

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0), \qquad b_n = x_n + y_n + z_n.$$

$$x_{n+1} = x_n + y_n + z_n, \qquad y_{n+1} = x_n, \qquad z_{n+1} = y_n.$$

Ultimul simbol al fiecărei prelungiri permite recuperarea unică a șirului anterior.

Verificăm stările la lungimea 3

n	x_n	y_n	z_n	b_n
0	1	0	0	1
1	1	1	0	2
2	2	1	1	4
3	4	2	1	7

Întrebare

Care este singurul șir de lungime 3 exclus?

Din stări, o recurență scalară

Pentru $n \geq 3$:

$$x_n = b_{n-1}, \qquad y_n = b_{n-2}, \qquad z_n = b_{n-3}.$$

Astfel

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}, \qquad b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4.$$

Sistemul de stări explică de unde vine recurența cu trei termeni; $b_4 = 13$, $b_5 = 24$.

Cursul 5 · partea 5

Divide et impera și audit

Ipoteza exactă de cost

Pentru $n = 2^k$, $k \geq 0$:

$$T(1) = 1, \qquad T(n) = 2T(n/2) + n \quad (n \geq 2).$$

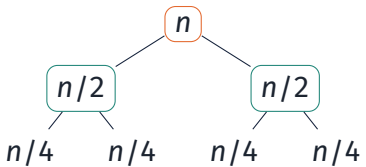
Două subprobleme de mărime $n/2$; combinarea costă exact n.

Întrebare

Cât sunt $T(2)$ și $T(4)$? Ce spune recurența despre $T(3)$?

Pe niveluri, costul rămâne n

Pentru $n = 2^k$ cu $k \geq 2$:



n

$2 \cdot (n/2) = n$

$4 \cdot (n/4) = n$

Sunt k niveluri de combinare și n frunze cu costul 1.

Schimbăm indicele și normalizăm

Punem $t_k = T(2^k)$ și $s_k = t_k / 2^k$:

$$t_0 = 1, \qquad t_k = 2t_{k-1} + 2^k \quad \Longrightarrow \quad s_0 = 1,\ s_k = s_{k-1} + 1.$$

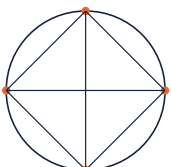
Ideea

$s_k = k + 1$, deci $T(n) = n\,(1 + \log_2 n)$ pentru $n = 2^k$.

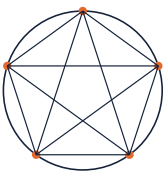
$T(2) = 4$, $T(4) = 12$. Termenul n fără logaritm este costul frunzelor; $n \log_2 n$ ar da $T(1) = 0$.

Audit: cercul lui Moser

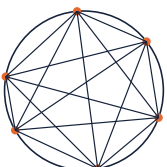
n puncte pe un cerc, toate coardele, fără trei coarde concurente. Câte regiuni?



$n = 4$: 8



$n = 5$: 16



$n = 6$: ?

Întrebare

1, 2, 4, 8, 16, … Pariați pe 32?

31, **nu** 32

Pentru șase puncte: 31 de regiuni; pentru șapte: 57.

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}: \qquad 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ \ldots$$

Ideea

O coardă nouă care taie r coarde adaugă $r + 1$ regiuni. Total: 1+ coardele + punctele de intersecție, câte unul pentru fiecare patru puncte.

Cinci valori nu demonstrează o regulă; o descompunere, da. Hexagonul regulat: 30 (trei diametre prin centru).

Bilet de ieșire

Vrem să numărăm șirurile binare de lungime n fără `00`.

Întrebare

Definiți două stări. Unde puneți șirul vid? Justificați o tranziție.

În notițe: provocarea șirului închis pe cerc, recurența deranjamentelor și puntea către seriile formale din cursul 6.