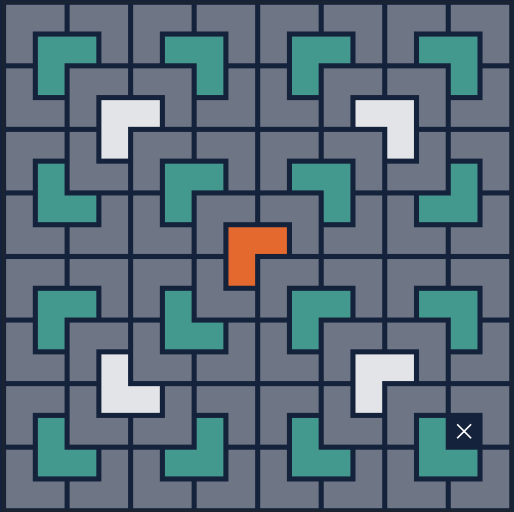
Cursul 6

Funcții generatoare și descompuneri combinatorice

Metode ale matematicii discrete și aplicații

George-Cătălin Țurcaș

Universitatea Babeș-Bolyai · 2026–2027



Quiz · cinci minute

a_n este numărul șirurilor binare de lungime n fără două simboluri 1 alăturate; în cursul 5 am găsit $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ și $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.

Cât este a_5?

A. 8 **B.** 13 **C.** 16 **D.** 21

Pe o foaie scrieți numai numele și litera aleasă.

Răspunsul la quiz: B

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 13, \quad a_6 = 21.$$

Tot șirul, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., va începea astăzi într-o singură expresie:

$$1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \cdots = \ ?$$

Răspunsul vine după pauză.

Cursul 6 · partea 1

De la obiecte la coeficienți

Paranteze corecte

Fiecare prefix are cel puțin tot atâtea paranteze deschise câte închise; la final, numerele sunt egale.

Cu trei perechi:

$$((()))\,,\quad (()())\,,\quad (())()\,,\quad ()(())\,,\quad ()()().$$

Întrebare

De ce numărăm și șirul vid, cu 0 perechi?

La seminar: drumuri cu pași U și D care nu coboară sub axă. În cursul 3: buletinele de vot.

Un șir întreg într-o expresie

c_n este numărul șirurilor corecte cu n **perechi**.

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots .$$

Ideea

Exponentul ține minte mărimea; coeficientul numără obiectele.

La seminar ați scris $C = 1 + xC^2$ pentru drumuri. Astăzi: ce înseamnă, de ce determină C și ce „rădăcină” alegem.

Cursul 6 · partea 2

Serii formale

Simbolul x nu se evaluează

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]], \qquad [x^n]A(x) = a_n.$$

Două serii sunt egale când au aceiași coeficienți la fiecare grad.

Ideea

La fiecare grad facem numai calcule finite. Nu cerem convergență.

Și $\sum_{n \geq 0} n!\, x^n$ este o serie formală legitimă.

Deplasare sau eliminare?

Pentru $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$:

$$xA = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots, \qquad A - a_0 - a_1 x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Întrebare

Dacă $A = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots$, cât sunt $[x^2](xA)$ și $[x^2](A - 2 - 3x)$?

Unde începe suma?

$$\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n = x\,(A - a_0), \qquad \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n = x^2 A.$$

Prima sumă începe cu a_1x^2; în xA apare și a_0x.

Înaintea oricărei transformări, scrieți primii doi termeni.

Cursul 6 · partea 3

Produsul și inversa

Produsul adună mărimi

Dacă $A = \sum a_k x^k$ și $B = \sum b_j x^j$, atunci

$$[x^n](AB) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}.$$

Ideea

$a_k b_{n-k}$ numără perechile **ordonate** de obiecte cu mărimile $(k, n - k)$.

Suma are numai $n + 1$ termeni; descompunerea în componente trebuie să fie unică.

Toate descompunerile mărimii 2

$A = 1 + 2x + x^2, \quad B = 1 + x + x^2 + \cdots.$

prima		a doua		
0	+	2	$\longrightarrow$	1
1	+	1	$\longrightarrow$	2
2	+	0	$\longrightarrow$	1

$[x^2](AB) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$. Produsul coeficienților de același indice ar da 1.

Când există inversa?

Teoremă
$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ este inversabilă dacă și numai dacă $a_0 \neq 0$; inversa este unică.

Dacă $AB = 1$, ce impune coeficientul de grad 0?

$$a_0 b_0 = 1.$$

x nu are inversă în $\mathbb{Q}[[x]]$: orice xB are termenul constant 0.

Construim inversa, grad după grad

Condiția $[x^n](AB) = 0$ pentru $n \geq 1$ dă

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \qquad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \, b_{n-k}.$$

Ideea

Fiecare b_n folosește numai coeficienți deja cunoscuți.

Aceleași egalități dovedesc existența și unicitatea.

Un control simplu și o întrebare

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots) = 1.$$

La gradul 0: 1. La orice grad $n \geq 1$: $1 - 1 = 0$.

Întrebare
Ce coeficient are x^n în $1/(1 - x)^2$? Ce perechi numără?

Pauză: aproximativ 20 de minute.

Cursul 6 · partea 4

Fibonacci: condițiile inițiale contează

Fibonacci: cele trei sume

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.

$$\sum_{n\geq 2} F_n x^n = F(x) - x,$$
$$\sum_{n\geq 2} F_{n-1} x^n = x\,(F(x) - F_0) = xF(x),$$
$$\sum_{n\geq 2} F_{n-2} x^n = x^2 F(x).$$

Păstrați vizibil indicele de pornire $n = 2$.

De unde vine numărătorul x?

$$F - x = xF + x^2F \quad \Longrightarrow \quad (1 - x - x^2)\,F = x.$$

Termenul constant al numitorului este 1, deci

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Întrebare

Ce spun coeficienții de grade 0 și 1 ai identității?

Ordinul doi: aceeași contabilitate

Dacă $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$ pentru $n \geq 2$, atunci

$$U(x) = \frac{u_0 + (u_1 - \alpha u_0)\, x}{1 - \alpha x - \beta x^2}.$$

Ideea

Numitorul codifică recurența; numărătorul păstrează datele inițiale.

Șirurile din quiz: $A(x) = (1 + x)/(1 - x - x^2) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \cdots$

Audit: o ecuație care pierde F_1

Un calcul propune: „Din recurență, $F = xF + x^2F$, deci $F = 0$.”

Întrebare

Care linie este greșită? Ce coeficient dă imediat contradicția?

$[x^1]F = 1$, dar $[x^1](xF + x^2F) = F_0 = 0$. Suma din recurență începe la $n = 2$: membrul stâng este $F - x$.

Pentru curioși: 1/89

$$\frac{1}{89} = 0{,}0112359550\ldots, \qquad \frac{1}{9899} = 0{,}0001\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ \ldots$$

Analiza: seria $\sum F_n x^n$ converge pentru $|x| < 1/\varphi$, cu suma $x/(1 - x - x^2)$. Pentru $x = 1/10$: $\sum_{n\geq 0} F_n/10^{n+1} = 1/89$.

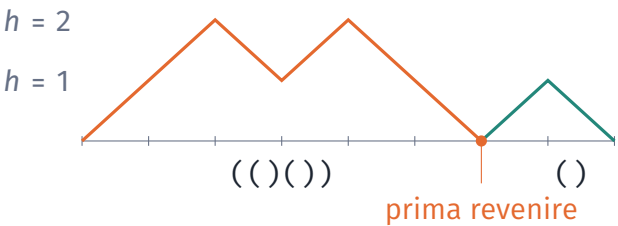
Identitatea formală nu are nevoie de această evaluare; evaluarea are nevoie de identitate.

Cursul 6 · partea 5

Catalan: prima revenire

Drumul lui (( ) ( )) ( )

h = numărul parantezelor deschise minus numărul celor închise.



Între primul simbol și prima revenire, înălțimea este cel puțin 1.

Tăietura canonică

Pentru (( )( ))( ):

$$\underbrace{(}_{\text{exterior}}\ \underbrace{(\,)(\,)}_{P}\ \underbrace{)}_{\text{prima revenire}}\ \underbrace{(\,)}_{Q}.$$

În general, orice șir corect nevid are forma

$$(\ P\ )\ Q.$$

P și Q sunt corecte; oricare dintre ele poate fi vid.

De ce este o bijecție?

1. Tăiem la **prima** revenire: interiorul P și restul Q sunt corecte.
2. Din orice pereche ordonată (P, Q) reconstruim $(P)Q$, iar paranteza închisă adăugată este prima revenire.

Întrebare

Ce se strică dacă alegem o revenire mai târzie?

Unde se duce perechea exterioară?

Dacă P are k perechi și Q are $n - 1 - k$, întregul șir are

$$1 + k + (n - 1 - k) = n \quad \text{perechi.}$$

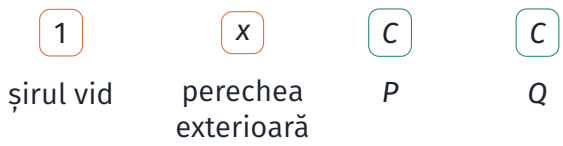
Pentru fiecare k: $c_k \, c_{n-1-k}$ alegeri.

Ideea

$c_0 = 1$, iar $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, c_{n-1-k}$ pentru $n \geq 1$.

Citim ecuația combinatoric

$$C(x) = 1 + x\,C(x)^2.$$



Produsul C^2 numără perechi ordonate (P, Q); exponentul numără perechi de paranteze.

Ecuația determină toți coeficienții

La gradul 0: $c_0 = 1$. La gradul $n \geq 1$:

$$c_n = [x^{n-1}]C^2 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, c_{n-1-k}.$$

Ideea

Membrul drept folosește numai $c_0, \ldots, c_{n-1}$: unicitate prin inducție.

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2 + 1 + 2 = 5, \quad c_4 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14.$$

Termenii de la capete corespund lui P sau Q vid.

Încercați descompunerea

Pentru $)(())$, găsiți P și Q în $(P)Q$.

Întrebare
Dacă am tăia la revenirea finală, ar rămâne interiorul un șir corect?

Prima revenire dă $P = \varnothing$, $Q = (())$. La tăietura finală, interiorul $)(()$ ar începe cu o paranteză închisă.

Cursul 6 · partea 6

Provocarea: care rădăcină?

O ecuație de gradul al doilea, dar în ce?

$xC^2 - C + 1 = 0$, deci „formula” ar da

$$C = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Întrebare

Ce înseamnă $\sqrt{1 - 4x}$ în $\mathbb{Q}[[x]]$? Și de ce ar avea două soluții o ecuație cu soluție unică?

Admitem, deocamdată, dezvoltarea binomială $(1 + t)^{1/2} = \sum_n \binom{1/2}{n} t^n$ cu $t = -4x$.

Semnul alege seria

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 - 28x^5 - \cdots$$

Cu +: numărătorul $2 - 2x - \cdots$ împărțit la $2x$ începe cu $1/x$. **Nu este o serie formală.**

Cu −: numărătorul $2x + 2x^2 + 4x^3 + 10x^4 + 28x^5 + \cdots$, împărțit la $2x$:

$$C = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots$$

În general $c_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$: formula din cursul 3.

Ce am presupus și unde se justifică

1. Că $\sqrt{1 - 4x}$ are sens ca serie formală.
2. Că dezvoltarea binomială se aplică fără convergență.

Ideea

Extensia 1 construiește seria S cu $S^2 = 1 - 4x$ direct pe coeficienți (derivare formală) și abia atunci calculul devine demonstrație.

Trei explicații ale aceleiași formule: reflexia (cursul 3), lema rotației (S3.7), calea algebrică (aici).

Bilet de ieșire

Calculați $[x^3]\big(x\,C(x)^2\big)$.

Întrebare

De ce apare coeficientul de grad 2 din C^2, deși șirul are trei perechi?

Explicați cele trei mărimi posibile ale perechii (P, Q). În notițe: formula lui Catalan pe cale algebrică, sumele parțiale și deranjamentele.