Seminarul 1

Inducție, numărare și cutii

Fișă de seminar · George-Cătălin Țurcaș

Cum lucrați

Fișa acoperă cursurile 1 și 2; dacă o primiți înainte de cursul 2, pagina aceasta conține tot ce vă trebuie din el. Țintă de lucru: aproximativ patru ore, cel mult cinci. Rezervați circa 30 de minute acestei pagini, câte 20 de minute problemelor S1.1–S1.3, câte 35 de minute pentru două probleme medii la alegere, 50 de minute unei încercări la o provocare și 30 de minute pentru a vă nota întrebările. Nu se cere rezolvarea tuturor problemelor. Când timpul alocat unei probleme s-a terminat, notați ideea, un caz mic verificat și locul exact în care v-ați blocat: de aici pornește discuția de la seminar. Punctele marcate cu * sunt opționale. Dificultate: A — accesibilă, M — medie, C — provocare.

Înainte de seminar: ce folosim

Inducție. Pentru afirmații $P(n)$, $n \geq n_0$, se demonstrează baza $P(n_0)$ și pasul $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \geq n_0$. În inducția tare, pentru a demonstra $P(k+1)$ puteți folosi toate afirmațiile $P(n_0), \dots, P(k)$. Dacă pasul folosește cazul $N-3$, verificați direct suficiente cazuri inițiale, ca să nu ieșiți din domeniu.

Mulțimi și funcții. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ și, pentru $n \geq 1$, $[n] = \{1, \dots, n\}$; $|A|$ este numărul de elemente al mulțimii finite A. O funcție $f\colon A \to B$ asociază fiecărui $x \in A$ exact un element $f(x) \in B$; ea este *injectivă* dacă elemente distincte au imagini distincte. *Diferența simetrică* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ conține elementele aflate în exact una dintre mulțimi; $|A \,\Delta\, B| = 1$ înseamnă că B se obține din A adăugând sau eliminând un singur element.

Reguli de numărare. *Regula sumei*: dacă obiectele se împart în două clase disjuncte, cu p, respectiv q obiecte, atunci sunt $p+q$ obiecte în total. *Regula produsului*: dacă un obiect se construiește prin două alegeri succesive, cu p variante pentru prima și, oricare ar fi aceasta, cu exact q variante pentru a doua, iar alegeri diferite dau obiecte diferite, atunci sunt pq obiecte. Notăm $m! = 1 \cdot 2 \cdots m$ pentru $m \geq 1$ și $0! = 1$.

Principiul cutiei. Dacă $k+1$ obiecte sunt așezate în k cutii, unde $k \geq 1$, atunci o cutie conține cel puțin două obiecte. *Exemplu:* dintre oricare șase întregi, doi au diferența divizibilă cu 5. Așezăm numerele în cinci cutii, după restul împărțirii la 5; două ajung în aceeași cutie, deci diferența lor este divizibilă cu 5. Numerele nu trebuie să fie distincte: diferența 0 este divizibilă cu 5.

Resturi. Pentru un întreg a și un întreg $n \geq 1$ există numere unice $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ cu $a = qn + r$; r este restul împărțirii lui a la n. De exemplu, $-7 = (-2) \cdot 5 + 3$, deci restul lui -7 la împărțirea cu 5 este 3. Două numere au același rest la împărțirea cu n exact atunci când n divide diferența lor.

Subșir și bloc. Un *subșir* al șirului $a_1, \dots, a_N$ este $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, cu $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$: păstrează ordinea, dar poate sări termeni. Un *bloc* este format din termeni consecutivi, $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$. În șirul $4, 1, 3, 2$, termenii $1, 2$ formează un subșir strict crescător, dar nu un bloc.

S1.1 O sumă, două explicații

A · accesibilă

(a) Demonstrați prin inducție că, pentru orice $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

(b) Dați o a doua demonstrație, fără calcule algebrice. Numim *gnomon* figura în formă de L care rămâne după ce dintr-un pătrat $k \times k$ scoatem un pătrat $(k-1)\times(k-1)$ care are un colț comun cu el. Descompuneți un pătrat de $n \times n$ pătrățele în n gnomoni și numărați pătrățelele fiecăruia.

(c) Ce explică demonstrația de la (b) și nu explică cea de la (a)?

(d)* Arătați că $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$. Găsiți și pentru această identitate o descompunere a unui pătrat în gnomoni care să o explice.

S1.2 Funcții, injecții și principiul cutiei

A · accesibilă

Fie A și B mulțimi finite, cu $|A| = n \geq 1$ și $|B| = m \geq 1$.

(a) Arătați prin inducție după n că există exact m^n funcții $f\colon A \to B$.

(b) Câte dintre aceste funcții sunt injective? Tratați separat cazurile $n \leq m$ și $n > m$.

(c) Deduceți *principiul cutiei*: dacă $n > m$, orice funcție $f\colon A \to B$ ia aceeași valoare în două elemente distincte ale lui A. Reformulați concluzia în limbajul obiectelor așezate în cutii.

S1.3 Alegeri din mulțimea {1, …, 2n}

A · accesibilă

Din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, unde $n \geq 1$, alegem $n+1$ numere distincte.

(a) Arătați că printre numerele alese există două numere consecutive. Deduceți că printre ele există două numere prime între ele.

(b) Arătați printr-un exemplu că, dacă alegem numai n numere, afirmațiile de la (a) pot fi false.

(c)* Arătați că printre cele $n+1$ numere alese există două dintre care unul îl divide pe celălalt.

S1.4 Monede de 3 și de 5: de la inducție la algoritm

M · medie

(a) Arătați prin inducție tare că orice întreg $N \geq 8$ se poate scrie sub forma $N = 3a + 5b$, cu $a, b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(b) Transformați demonstrația într-o procedură care, pentru un $N \geq 8$ dat, produce efectiv o pereche (a, b). Demonstrați că procedura se oprește și că rezultatul ei este corect.

(c) Care dintre numerele $1, 2, \ldots, 7$ se pot scrie sub această formă? Deduceți că pragul 8 nu poate fi coborât.

S1.5 Blocuri cu suma divizibilă cu n

M · medie

Fie $n \geq 1$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi oarecare, nu neapărat pozitive sau distincte.

(a) Arătați că există indici $1 \leq i \leq j \leq n$ astfel încât suma $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$ să fie divizibilă cu n.

(b) Arătați că, pentru $n \geq 2$, concluzia poate fi falsă pentru un șir de numai $n-1$ întregi.

S1.6 Atelier de audit: trei inducții greșite

M · medie

Fiecare dintre argumentele de mai jos pretinde că demonstrează o afirmație falsă. Pentru fiecare, localizați exact greșeala — o propoziție nejustificată sau o etapă lipsă — și precizați pentru ce valori ale lui k sau n apare ea. Explicați apoi de ce, într-un audit, nu este suficient să arătați că afirmația este falsă.

(a) *Afirmație:* oricare $n \geq 2$ drepte distincte din plan, dintre care oricare două sunt concurente, trec toate prin același punct.
Argument: pentru $n = 2$, cele două drepte se intersectează într-un punct. Fie $k \geq 2$ și presupunem afirmația adevărată pentru orice k drepte distincte, oricare două concurente. Fie $d_1, \dots, d_{k+1}$ drepte distincte, oricare două concurente. Prin ipoteză, dreptele $d_1, \dots, d_k$ trec printr-un punct P, iar dreptele $d_2, \dots, d_{k+1}$ trec printr-un punct Q. Atunci dreptele $d_2, \dots, d_k$ trec atât prin P, cât și prin Q. Cum două drepte distincte au cel mult un punct comun, rezultă $P = Q$, deci toate cele $k + 1$ drepte trec prin P.

(b) *Afirmație:* pentru orice număr real $a \neq 0$ și orice $n \in \mathbb{N}$, avem $a^n = 1$.
Argument (inducție tare): $a^0 = 1$. Fie $k \geq 0$ și presupunem că $a^j = 1$ pentru orice j cu $0 \leq j \leq k$. Atunci

$$a^{k+1} = \frac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

(c) *Afirmație:* pentru orice $n \geq 1$, avem $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(2n+1)^2}{8}$.
Argument: dacă egalitatea are loc pentru un $k \geq 1$, atunci

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(2k+1)^2}{8} + (k+1) = \frac{4k^2 + 12k + 9}{8} = \frac{(2k+3)^2}{8},$$

deci egalitatea are loc și pentru $k + 1$. Prin inducție, ea este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

S1.7 Coduri Gray și un argument de paritate

C · provocare

Pentru $n \geq 1$ notăm $[n] = \{1, \dots, n\}$. O listă $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$ în care fiecare submulțime a lui $[n]$ apare exact o dată se numește *cod Gray* dacă oricare două mulțimi consecutive diferă printr-un singur element, adică $|A_i \,\Delta\, A_{i+1}| = 1$ pentru $1 \leq i < 2^n$. Codul este *ciclic* dacă, în plus, $|A_{2^n} \,\Delta\, A_1| = 1$.

(a) Pentru orice $n \geq 2$, construiți un cod Gray ciclic al submulțimilor lui $[n]$ și demonstrați complet că are proprietățile cerute.

(b) Arătați că, dacă n este par, nu există niciun cod Gray (ciclic sau nu) care începe cu $\emptyset$ și se termină cu $[n]$.

(c) Găsiți un cod Gray al submulțimilor lui $[3]$ care începe cu $\emptyset$ și se termină cu $[3]$.

S1.8 Erdős–Szekeres, cu prag optim

C · provocare

Fie $r, s \geq 1$ întregi.

(a) Arătați că orice șir de $rs+1$ numere reale distincte conține un subșir strict crescător de lungime $r + 1$ sau un subșir strict descrescător de lungime $s + 1$.

(b) Construiți un șir de rs numere reale distincte care nu conține niciunul dintre aceste subșiruri. Așadar, $rs + 1$ este cel mai mic număr de termeni care garantează concluzia de la (a).