Seminarul 2

Numărare cu explicații și restricții

Fișă de seminar · George-Cătălin Țurcaș

Cum lucrați

Fișa acoperă cursul 3 și, pentru două dintre probleme, o idee din cursul 4, explicată mai jos; pagina aceasta conține tot ce vă trebuie. Țintă de lucru: aproximativ patru ore, cel mult cinci. Rezervați circa 30 de minute acestei pagini, câte 20 de minute problemelor S2.1–S2.3, câte 35 de minute pentru două probleme medii la alegere, 50 de minute unei încercări la o provocare și 30 de minute pentru a vă nota întrebările. Nu se cere rezolvarea tuturor problemelor. Când timpul alocat unei probleme s-a terminat, notați ideea, un caz mic verificat și locul exact în care v-ați blocat: de aici pornește discuția de la seminar. Punctele marcate cu * sunt opționale. Dificultate: A — accesibilă, M — medie, C — provocare.

Înainte de seminar: ce folosim

Notații. Pentru $n \geq 1$, $[n] = \{1, \dots, n\}$ și $[0] = \emptyset$; $|A|$ este numărul de elemente al mulțimii finite A; $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ și $0! = 1$. O *permutare* a lui $[n]$ este o bijecție $\sigma : [n] \to [n]$; există $n!$ permutări.

Coeficienți binomiali. $\binom{n}{k}$ este numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente; pentru $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, iar pentru $k < 0$ sau $k > n$ convenim $\binom{n}{k} = 0$. Avem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ și identitatea lui Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $(n \geq 1)$, care generează triunghiul lui Pascal.

Dubla numărare. Pentru a demonstra o identitate, numim o mulțime finită și o numărăm în două moduri; pentru fiecare termen spunem ce numără. O *bijecție* $f : A \to B$ se certifică printr-o inversă $g : B \to A$, verificând $g(f(a)) = a$ și $f(g(b)) = b$; ea arată că $|A| = |B|$.

Stele și separatoare. Soluțiile întregi nenegative ale ecuației $x_1 + \cdots + x_m = N$ $(N \geq 0, m \geq 1)$ sunt în bijecție cu șirurile formate din N stele și $m - 1$ separatoare: x_i este numărul stelelor din blocul i, iar blocurile pot fi goale. Numărul lor este $\binom{N+m-1}{m-1}$. O condiție $x_i \geq a_i$ se elimină punând $y_i = x_i - a_i$; dacă suma rămasă este 0, există exact o soluție, iar dacă este negativă, niciuna.

Binomul lui Newton. $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, egalitate de polinoame: coeficientul lui $x^{n-k}y^k$ numără alegerile celor k factori din care luăm y. În S2.7 citim această egalitate pentru polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, inelul în care $1 + 1 = 0$: reducând fiecare coeficient modulo 2, egalitatea rămâne adevărată.

Includerea și excluderea (din cursul 4). Pentru submulțimi finite, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ și

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Semnele se verifică urmărind un element: unul aflat în exact două dintre mulțimi contribuie cu $2 - 1 = 1$, unul aflat în toate trei cu $3 - 3 + 1 = 1$. În general, pentru $A_1, \dots, A_m$, se adună cardinalele intersecțiilor cu un număr impar de mulțimi și se scad cele cu un număr par: $\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [m]} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$. *Exemplu:* în $\{1, \dots, 30\}$ există $\lfloor 30/4 \rfloor = 7$ multipli de 4, $\lfloor 30/6 \rfloor = 5$ multipli de 6 și $\lfloor 30/12 \rfloor = 2$ multipli ai lui $12 = \operatorname{cmmmc}(4, 6)$, deci $7 + 5 - 2 = 10$ numere divizibile cu 4 sau cu 6.

O limită superioară se tratează prin complement: ecuația $x + y = 5$, cu $x, y \geq 0$, are 6 soluții; condiția $x \leq 3$ este încălcată exact de soluțiile cu $x \geq 4$, iar substituția $u = x - 4$ dă $u + y = 1$, cu 2 soluții. Rămân $6 - 2 = 4$ soluții. Pentru mai multe limite, încălcările se pot suprapune și folosim includerea și excluderea.

S2.1 Un comitet cu șef

A · accesibilă

Dintr-un grup de $n \geq 1$ persoane se alege un comitet cu k membri, unde $1 \leq k \leq n$, iar apoi, dintre membrii comitetului, un șef al acestuia.

(a) Numărați perechile (comitet, șef) în două moduri și deduceți, fără a dezvolta factorialele, identitatea

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Ce reprezintă cele două numărări pentru $k = 1$ și pentru $k = n$?

(c) Numărând perechile (comitet, șef) în care comitetul poate avea orice număr de membri, arătați că

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

S2.2 Șapte unități în trei cutii

A · accesibilă

Câte triplete ordonate (x_1, x_2, x_3) de numere întregi satisfac $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, dacă:

(a) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$;

(b) $x_1, x_2, x_3 \geq 1$;

(c) $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 0$ și $x_3 \geq 1$?

Explicați fiecare numărare printr-o codificare cu stele și separatoare și spuneți de ce răspunsurile de la (b) și (c) coincid, deși condițiile sunt diferite.

S2.3 Divizibilitate și suprapuneri

A · accesibilă

Câte numere din $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sunt divizibile cu cel puțin unul dintre numerele 2, 3 și 5? Câte nu sunt divizibile cu niciunul dintre ele? Justificați semnele din formula folosită, urmărind de câte ori este numărat un multiplu al lui 30.

S2.4 Submulțimi fără vecini

M · medie

Fie $n \geq 1$ și $0 \leq k \leq n$ numere întregi.

(a) Determinați numărul submulțimilor cu k elemente ale lui $[n] = \{1, \ldots, n\}$ care nu conțin două numere consecutive, construind o bijecție care justifică răspunsul. Precizați separat cazul $k = 0$ și valorile lui k pentru care nu există asemenea submulțimi.

(b) Verificați formula pentru $n = 5$, listând submulțimile.

(c)* Adunați răspunsurile după k pentru $n = 1, 2, \ldots, 6$ și priviți șirul obținut. Îl recunoașteți? Vom reveni la el în cursul 5.

S2.5 Aproape de capacitatea maximă

M · medie

Determinați numărul tripletelor ordonate (x_1, x_2, x_3) de numere întregi pentru care

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \qquad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6.$$

Dați două soluții: una prin includere și excludere și una care numără *locurile rămase libere*, adică numerele $3 - x_1$, $4 - x_2$ și $6 - x_3$.

S2.6 Coliere cu patru mărgele

M · medie

Patru mărgele, fiecare albă sau neagră, sunt așezate pe un cerc. Două configurații reprezintă același colier dacă una se obține din cealaltă printr-o rotație cu un multiplu de 90°; nu identificăm configurații prin reflexie.

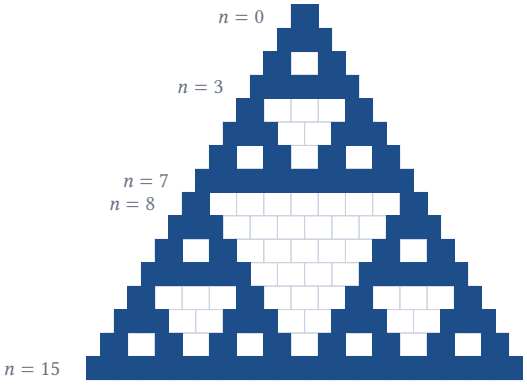
(a) Determinați numărul colierelor, clasificându-le după numărul mărgelelor negre.

(b) De ce calculul $2^4/4$ nu dă răspunsul corect? Pentru fiecare colier, precizați câte șiruri binare distincte de lungime 4 îl reprezintă atunci când alegem un punct de pornire și citim mărgelele în același sens.

S2.7 Triunghiul lui Pascal modulo 2

C · provocare

Pentru $n \geq 0$, notăm cu $i(n)$ numărul coeficienților binomiali *impari* de pe linia n a triunghiului lui Pascal, adică numărul indicilor $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ pentru care $\binom{n}{k}$ este impar. Figura arată liniile 0–15: o căsuță plină înseamnă un coeficient impar.



(a) Determinați $i(n)$ pentru $n \leq 15$ și formulați o conjectură care exprimă $i(n)$ prin scrierea lui n în baza 2. Pentru care valori ale lui n sunt *toți* coeficienții de pe linia n impari?

(b) Lucrăm cu polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, în care $1 + 1 = 0$. Arătați că, pentru orice $j \geq 0$,

$$(1 + x)^{2^j} = 1 + x^{2^j} \qquad \text{în } \mathbb{Z}_2[x].$$

(c) Scrieți $n = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_s}$, cu $j_1 > j_2 > \cdots > j_s \geq 0$, și deduceți că, în $\mathbb{Z}_2[x]$,

$$(1 + x)^n = \prod_{t=1}^{s} \left(1 + x^{2^{j_t}}\right).$$

Dezvoltând produsul, demonstrați conjectura de la (a).

(d)* Deduceți criteriul: $\binom{n}{k}$ este impar dacă și numai dacă fiecare cifră din scrierea lui k în baza 2 este cel mult egală cu cifra corespunzătoare din scrierea lui n.

S2.8 Anticatene și lanțuri

C · provocare

Fie $n \geq 1$. O familie $\mathscr{F}$ de submulțimi ale lui $[n] = \{1, \dots, n\}$ este o *anticatenă* dacă niciun membru al ei nu este inclus într-un alt membru al ei. Demonstrați teorema lui Sperner:

$$|\mathscr{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

urmând pașii de mai jos.

(a) O permutare $(a_1, \dots, a_n)$ a lui $[n]$ determină *lanțul* $\emptyset \subset \{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \cdots \subset [n]$. De ce conține acest lanț cel mult un membru al lui $\mathscr{F}$?

(b) Pentru $A \subseteq [n]$ cu $|A| = k$, câte permutări au mulțimea A în lanțul lor? Numărând perechile (A, σ) cu $A \in \mathscr{F}$ și A în lanțul lui σ, deduceți

$$\sum_{A \in \mathscr{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

(c) Arătați că $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ pentru $0 \leq k \leq n$ și încheiați demonstrația. Construiți o anticatenă care atinge marginea și verificați cazul $n = 1$.