Seminarul 3

Recurențe și funcții generatoare

Fișă de seminar · George-Cătălin Țurcaș

Cum lucrați

Fișa acoperă cursurile 5 și 6; pagina aceasta conține tot ce vă trebuie ca să puteți începe înainte de ele. Timp de lucru estimat: aproximativ patru ore, cel mult cinci: 30 de minute pentru această pagină, câte 20–25 de minute pentru S3.1–S3.3, câte 35 de minute pentru două probleme medii la alegere, 60 de minute pentru o provocare și 30 de minute pentru a vă nota întrebările. Nu se cere rezolvarea tuturor problemelor; când timpul alocat unei probleme s-a terminat, notați ideea, un caz mic verificat și locul exact în care v-ați blocat: de aici pornește discuția de la seminar. Punctele marcate cu * sunt opționale. Dificultate: A — accesibilă, M — medie, C — provocare.

Înainte de seminar: ce folosim

Convenții. Lucrăm cu întregi nenegativi, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; indicii șirurilor încep de la 0, dacă nu se spune altfel. Șirul vid are lungimea 0, o sumă vidă este 0, un produs vid este 1, $0! = 1$. Pentru $0 \le k \le n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; pentru $k < 0$ sau $k > n$ convenim $\binom{n}{k} = 0$.

Recurențe. O *relație de recurență* exprimă un termen al unui șir prin termeni anteriori; împreună cu condițiile inițiale necesare, ea determină succesiv fiecare termen. Două șiruri cu aceleași valori inițiale și aceeași recurență sunt egale, prin inducție; de aceea o formulă propusă se demonstrează verificând valorile inițiale și recurența, pentru *toți* indicii din domeniul ei. Când recurența provine dintr-o numărare, clasele descompunerii trebuie să fie disjuncte și să cuprindă toate obiectele, iar fiecare obiect trebuie să se reconstruiască într-un singur fel.

Șirul lui Fibonacci. Folosim $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, deci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Serii formale (instrumentele cursului 6). Lucrăm cu coeficienți raționali, în $\mathbb{Q}[[x]]$. Seria $A(x) = \sum_{n \ge 0} a_n x^n$, numită *funcția generatoare* sau *seria generatoare* a șirului (a_n), este un mod de a scrie șirul coeficienților; notăm $[x^n]A(x) = a_n$. Nu dăm lui x o valoare numerică și nu cerem convergență: două serii sunt egale când au aceiași coeficienți. Adunarea se face coeficient cu coeficient, iar în produs fiecare coeficient este o sumă finită, $[x^n]\big(A(x)B(x)\big) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}$; de exemplu, $[x^2]\big((1 + 2x + x^2)(1 + 3x)\big) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7$. Dacă a_j numără obiecte de un tip și de mărime j, iar b_k obiecte de alt tip și de mărime k, atunci $[x^n](AB)$ numără perechile ordonate de obiecte cu mărimea totală n; la fel, într-un produs cu mai mulți factori, fiecare contribuție la x^n vine din alegerea câte unui termen din fiecare factor, cu suma exponenților n.

Deplasare și inversă. Pentru $r \ge 0$, coeficientul lui x^n în $x^r A(x)$ este a_{n-r} dacă $n \ge r$ și 0 dacă $n < r$. O serie cu termenul constant nenul are o inversă multiplicativă unică, determinată coeficient cu coeficient din $A(x)B(x) = 1$. Pentru orice întreg $d \ge 1$, $\frac{1}{1-x^d} = \sum_{j \ge 0} x^{dj}$, fiindcă înmulțirea cu $1 - x^d$ anulează toți coeficienții de grad pozitiv și lasă termenul constant 1. Fracțiile se citesc în acest sens formal.

Drumuri și înălțimi. Un drum cu pași $U = (1, 1)$ și $D = (1, -1)$ se codifică prin șirul pașilor săi; înălțimea după un prefix este numărul pașilor U minus numărul pașilor D din acel prefix. Pentru un drum care revine la înălțimea 0, *prima revenire* este primul pas după care înălțimea redevine 0: în $UUDDUD$ ea are loc după pasul 4.

S3.1 O recurență de ordinul unu: turnurile din Hanoi

A · accesibilă

Pe una dintre trei tije verticale sunt așezate $n \geq 1$ discuri de diametre diferite, în ordinea descrescătoare a diametrelor, cu cel mai mare disc jos. O *mutare* ia discul de deasupra de pe o tijă și îl așază pe altă tijă, fără a-l pune vreodată peste un disc mai mic. Notăm cu h_n numărul minim de mutări prin care cele n discuri ajung, în aceeași ordine, pe o altă tijă, fixată dinainte. (Tijele joacă roluri simetrice, deci h_n nu depinde de tija de plecare și de cea de sosire.)

(a) Descrieți o procedură care mută cele n discuri folosind $2h_{n-1} + 1$ mutări și deduceți că $h_n \leq 2h_{n-1} + 1$ pentru $n \geq 2$.

(b) Pentru $n \geq 2$, arătați că orice succesiune corectă de mutări care rezolvă problema are cel puțin $2h_{n-1} + 1$ mutări. Priviți momentul în care discul cel mai mare se mută pentru prima dată: unde se află atunci celelalte discuri? Deduceți $h_1 = 1$ și $h_n = 2h_{n-1} + 1$ pentru $n \geq 2$.

(c) Calculați h_2, h_3, h_4, determinați o formulă pentru h_n și demonstrați-o prin inducție.

(d)* Jocul a fost inventat de Édouard Lucas în 1883, împreună cu legenda unor călugări care mută 64 de discuri, câte o mutare pe secundă. Estimați, în ani, cât durează mutarea întregului turn.

S3.2 Pavări cu pătrate și dominouri

A · accesibilă

Pentru $n \geq 0$, notăm cu p_n numărul pavărilor unei benzi $1 \times n$ cu pătrate 1×1 și dominouri 1×2, fără suprapuneri și fără goluri. Piesele de același tip sunt identice; două pavări sunt diferite dacă diferă pozițiile pieselor. Banda vidă ($n = 0$) are exact o pavare.

(a) Stabiliți condițiile inițiale și o recurență pentru p_n, justificând descompunerea pavărilor după prima piesă.

(b) Calculați p_6 și exprimați p_n prin șirul lui Fibonacci $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

(c)* Pentru $m, n \geq 1$, demonstrați, descompunând pavările după ceea ce se întâmplă între celulele m și $m + 1$, identitatea

$$p_{m+n} = p_m\, p_n + p_{m-1}\, p_{n-1},$$

și traduceți-o în limbajul numerelor lui Fibonacci.

S3.3 Coeficienți și deplasarea indicilor

A · accesibilă

Lucrăm cu serii formale, în sensul explicat pe pagina de pregătire.

(a) Determinați coeficientul $[x^n]\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ pentru fiecare întreg $n \geq 0$. Justificați calculul coeficienților produsului și verificați separat termenul constant.

(b) Arătați că $[x^n]\dfrac{1}{(1-x)^3} = \binom{n+2}{2}$ și explicați legătura cu stelele și separatoarele din cursul 3. Ce formulă obțineți, în general, pentru $[x^n]\dfrac{1}{(1-x)^m}$, cu $m \geq 1$?

S3.4 Șiruri zecimale cu un număr par de zerouri

M · medie

Fie e_n, respectiv o_n, numărul șirurilor de lungime $n \geq 0$ peste alfabetul $\{0, 1, \ldots, 9\}$ care conțin un număr par, respectiv impar, de zerouri. Zerourile de la început sunt permise, iar șirul vid conține zero zerouri.

(a) Stabiliți condițiile inițiale și un sistem de recurențe pentru e_n și o_n, justificând fiecare egalitate.

(b) Determinați formule explicite pentru cele două șiruri și verificați cazul $n = 2$ prin numărare directă.

(c)* Câte numere naturale cu exact $n \geq 1$ cifre au un număr par de cifre egale cu 0?

S3.5 O recurență pe puteri ale lui doi

M · medie

Funcția T este definită numai pe puterile lui 2, prin $T(1) = 0$ și

$$T(n) = 2T(n/2) + n - 1 \qquad (n = 2^k,\ k \geq 1).$$

Așa se numără, de exemplu, comparațiile unei proceduri care sortează o listă de n elemente împărțind-o în două jumătăți, sortând fiecare jumătate și interclasând apoi cele două liste sortate cu $n - 1$ comparații.

(a) Determinați o formulă exactă pentru $T(2^k)$, pentru orice $k \geq 0$, și demonstrați-o prin inducție.

(b) Explicați cum se modifică formula dacă înlocuim $T(1) = 0$ cu $T(1) = c$, unde c este o constantă reală. Diferența dintre cele două soluții este o constantă?

S3.6 O ecuație cu ponderile 1, 2 și 3

M · medie

Pentru $n \geq 0$, fie b_n numărul soluțiilor (u, v, w) în întregi nenegativi ale ecuației $u + 2v + 3w = n$; altfel spus, numărul modurilor de a plăti suma n cu monede de 1, 2 și 3 lei, dacă ordinea monedelor nu contează.

(a) Determinați seria generatoare $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ca fracție de polinoame și explicați ce reprezintă fiecare factor.

(b) Exprimați b_n printr-o sumă finită cu un singur indice de însumare, apoi calculați b_{12}. Verificați și cazul $n = 0$.

(c)* Pentru curioși. Verificați, pentru $0 \leq n \leq 12$, că b_n este întregul cel mai apropiat de $(n+3)^2/12$. Afirmația este adevărată pentru orice $n \geq 0$ și se poate demonstra astfel: scrieți $B(x) = N(x)/(1 - x^6)^3$ cu N polinom, explicați de ce, pe fiecare clasă de resturi modulo 6, atât b_n, cât și întregul cel mai apropiat de $(n + 3)^2/12$ sunt polinoame de grad cel mult 2 în n, și spuneți câte valori trebuie verificate pentru ca demonstrația să fie completă.

S3.7 Catalan: de la descompunere la formulă

C · provocare

Un *drum* de lungime $2n$ este un șir format din n pași $U = (1, 1)$ și n pași $D = (1, -1)$, parcurs din $(0, 0)$; *înălțimea* după un prefix este numărul pașilor U minus numărul pașilor D din acel prefix. Drumul este *admis* dacă înălțimea nu devine niciodată negativă. Notăm cu c_n numărul drumurilor admise de lungime $2n$; drumul vid este admis, deci $c_0 = 1$.

(a) Folosiți prima revenire la înălțimea 0 pentru a deduce recurența $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$, pentru $n \geq 1$, și ecuația $C(x) = 1 + xC(x)^2$ pentru seria $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$.

(b) *Lema rotației.* Fie w un șir format din $n + 1$ pași U și n pași D. Pentru $0 \leq k \leq 2n$, rotația $\rho^k(w)$ mută primii k pași ai lui w, în aceeași ordine, la sfârșitul șirului. Arătați că există exact un k pentru care toate înălțimile lui $\rho^k(w)$, după $1, 2, \ldots, 2n + 1$ pași, sunt strict pozitive. (Priviți cea mai mică înălțime a lui w și ultimul moment în care este atinsă.)

(c) Deduceți că cele $2n + 1$ rotații ale lui w sunt două câte două diferite. Grupând apoi cele $\binom{2n+1}{n}$ șiruri după rotații, arătați că numărul șirurilor cu toate înălțimile strict pozitive este

$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$. Ștergând primul pas al unui asemenea șir, obțineți

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad (n \geq 0).$$

(d)* În jurul unei mese rotunde stau $2n$ persoane, care dau mâna simultan, două câte două, fără ca două strângeri de mână să se încrucișeze. Arătați că numărul configurațiilor satisface aceeași recurență ca la (a), cu aceeași valoare inițială, deci este c_n.

S3.8 Zeckendorf: existență, unicitate, greedy

C · provocare

Fie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$. O *reprezentare admisă* a unui întreg $N \geq 0$ este o scriere a lui N ca sumă de termeni distincți din lista $F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5, \ldots$, fără doi indici consecutivi; termenul F_1 nu se folosește, iar suma vidă reprezintă 0.

(a) Pentru $N > 0$, alegeți cel mai mare $F_k \leq N$, scădeți-l și repetați cu restul, până la 0. Aplicați procedura pentru $N = 100$ și demonstrați că ea produce o reprezentare admisă pentru orice $N \geq 0$.

(b) Pentru $m \geq 2$, determinați cea mai mare sumă admisă care folosește numai termeni din lista $F_2, \ldots, F_m$ și demonstrați formula găsită.

(c) Demonstrați că fiecare întreg $N \geq 0$ are o singură reprezentare admisă, făcând abstracție de ordinea termenilor.

(d)* Pentru curioși. Deduceți din (a)–(c) că numărul submulțimilor lui $\{2, 3, \ldots, m\}$ fără doi indici consecutivi este F_{m+1} și comparați cu S2.4(c).